

COHOMOLOGIE CYCLIQUE ET FONCTEURS EXT^n .

Alain CONNES

Résumé : Nous construisons un foncteur $A \rightarrow A^h$ de la catégorie des algèbres (non commutatives) sur un corps k , dans une catégorie abélienne, et montrons que la cohomologie cyclique $H_\lambda^n(A)$ que nous avons introduite et étudiée dans [5], [6] coïncide avec $\text{Ext}^n(A^h, k^h)$. On en déduit une définition naturelle de la théorie bivariante (et de la cohomologie cyclique d'un anneau). La catégorie abélienne que nous utilisons est celle des k -espaces vectoriels cycliques. La notion d'objet cyclique dans une catégorie arbitraire est voisine de celle d'objet simplicial. Le rôle de la catégorie Δ des ensembles totalement ordonnés finis est tenu par une petite catégorie Λ qui contient à la fois Δ et les groupes cycliques finis. Nous montrons que le classifiant $B\Lambda$ est égal à $P_\infty(\mathbb{T}) = BS^1$.

Summary : We construct a functor $A \rightarrow A^h$ from the category of (non commutative) algebras over a field k , to an abelian category and show that the cyclic cohomology $H_\lambda^n(A)$, which we introduced and studied in [5], [6] coincides with $\text{Ext}^n(A^h, k^h)$. A natural definition of the bivariant theory follows. The abelian category used above is the category of cyclic vector spaces. The notion of cyclic object in a category is analogous to the notion of simplicial object. The category Δ of totally ordered finite sets is replaced by a small category Λ containing Δ and all cyclic finite groups. We show that the classifying space $B\Lambda$ is equal to $P_\infty(\mathbb{T}) = BS^1$.

Institut des Hautes Etudes Scientifiques
35, route de Chartres
91440 - Bures-sur-Yvette (France)

June 1983

IHES/83/M/34

I. Introduction.

Dans [8], I.I. Kasparov a défini dans le cadre des C^* algèbres la K théorie bivariante $KK(A,B)$ groupe abélien contravariant en A et covariant en B (où A et B sont des C^* algèbres). Pour $A = \mathbb{C}$ ce foncteur se réduit à la K théorie $K_0(B)$ et pour $B = \mathbb{C}$ à la K homologie de A , qui aux nuances près a été introduite par Brown Douglas Fillmore [2] et Atiyah [1].

La propriété principale du bifoncteur $KK(A,B)$ est l'existence d'un cup produit : $KK(A,B) \times KK(B,C) \rightarrow KK(A,C)$ (cf. [8]). Ce produit a les mêmes propriétés formelles que le produit de Yoneda

$$\text{Ext}^n(M,N) \times \text{Ext}^m(N,P) \rightarrow \text{Ext}^{n+m}(M,P)$$

en algèbre homologique (cf. [10] III 5), mais bien entendu la catégorie des C^* algèbres n'étant pas additive, la notion de foncteur dérivé de $\text{Hom}(A,B)$ n'y a pas de sens.

Dans [5], la construction, au niveau algébrique, du caractère de Chern en K homologie nous a dicté la définition suivante de la cohomologie cyclique $H_\lambda^n(A)$, $n \in \mathbb{N}$, d'une algèbre non commutative arbitraire A sur \mathbb{C} . C'est la cohomologie du complexe de cochaines (C_λ, b) où :

a) $C_\lambda^n(A)$ est l'espace des formes $n+1$ linéaires φ sur A telles que

$$\varphi(x^1, \dots, x^n, x^0) = (-1)^n \varphi(x^0, \dots, x^n) \quad \forall x^i \in A$$

b) $b: C_\lambda^n \rightarrow C_\lambda^{n+1}$ est donné par :

$$(b\varphi)(x^0, \dots, x^{n+1}) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \varphi(x^0, \dots, x^i x^{i+1}, \dots, x^{n+1}) + (-1)^{n+1} \varphi(x^{n+1} x^0, \dots, x^n)$$

Dans [6] , nous avons montré comment relier la cohomologie cyclique $H_{\lambda}^*(A)$ à la cohomologie de Hochschild $H^*(A, A^*)$ de A à coefficients dans le bimodule A^* des formes linéaires sur A . La relation s'exprime par un opérateur de périodicité de degré 2 : $S: H_{\lambda}^n(A) \rightarrow H_{\lambda}^{n+2}(A)$ et un couple exact :

$$\begin{array}{ccc} & H^*(A, A^*) & \\ B/ & \swarrow & \nwarrow I \\ H_{\lambda}^*(A) & \xrightarrow{S} & H_{\lambda}^*(A) \end{array}$$

Comme on dispose, pour calculer la cohomologie de Hochschild, des outils de l'algèbre homologique, le couple exact ci-dessus nous a permis de terminer le calcul de $H_{\lambda}^*(A)$ dans quelques exemples importants : ([6]) .

Le but de cette note est de montrer que les foncteurs $H_{\lambda}^n(A)$ sont des cas particuliers des foncteurs Ext^n de l'algèbre homologique, ce qui nous donnera :

- 1) Une définition naturelle de la théorie bivariante et du produit.
- 2) Une définition naturelle de $H_{\lambda}^n(A)$ quand A n'est plus une \mathbb{C} algèbre mais est un anneau (non commutatif).

Nous montrons également que le couple exact ci-dessus se prolonge dans le cadre 2).

Il reste à prolonger au cadre bivariant la définition du caractère de Chern de [5] et à montrer sa compatibilité avec le produit. La catégorie des algèbres et homomorphismes n'est pas additive mais nous construisons un foncteur $A \rightarrow A^h$ de cette catégorie dans la catégorie abélienne des espaces vectoriels cycliques, de telle sorte que $H_{\lambda}^n(A) = \text{Ext}^n(A^h, \mathbb{C}^h)$, pour toute algèbre A .

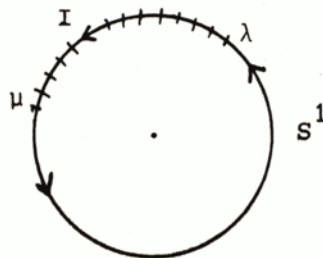
II Objet cyclique dans une catégorie.

La notion d'objet cyclique dans une catégorie arbitraire est analogue à celle d'objet simplicial. Rappelons qu'un objet simplicial d'une catégorie C est la donnée d'un foncteur contravariant de Δ dans C , où Δ est la catégorie dont les objets

sont les ensembles finis totalement ordonnés non vides et les flèches les applications croissantes au sens large ([4]).

La notion d'objet cyclique s'obtient en remplaçant Δ par la petite catégorie Λ dont les objets Λ_n sont indexés par $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ et dont les flèches $f \in \text{Hom}(\Lambda_n, \Lambda_m)$ sont les classes d'homotopie d'applications continues croissantes φ de degré 1 de S^1 dans S^1 telles que $\varphi(\mathbb{Z}_{n+1}) \subset \mathbb{Z}_{m+1}$. Ici $S^1 = \{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1\}$ et pour tout n , \mathbb{Z}_n désigne le sous-groupe formé des racines n ièmes de 1.

Il est clair que $\text{Hom}(\Lambda_n, \Lambda_m)$ est fini pour tous n, m et que pour $\lambda \in \mathbb{Z}_{n+1}$ la valeur de $\varphi(\lambda)$ ne dépend pas du choix de φ dans la classe de f , notons la $\tilde{f}(\lambda)$. On obtient ainsi un foncteur $f \rightarrow \tilde{f}$ de Λ dans la catégorie des ensembles. On vérifie que si \tilde{f} n'est pas une application constante elle détermine uniquement f , mais qu'il existe $n+1$ éléments $f \in \text{Hom}(\Lambda_n, \Lambda_m)$ tels que \tilde{f} soit l'application constante $\tilde{f}(i) = j \quad \forall i \in \mathbb{Z}_{n+1}$. Cela montre en particulier que Λ_0 n'est pas un objet final de Λ . Orientons S^1 (dans le sens trigonométrique) et associons à tout couple $\lambda, \mu \in S^1$ le fermé connexe $I = [\lambda, \mu] \subset S^1$, $I \neq S^1$.



Pour $f \in \text{Hom}(\Lambda_n, \Lambda_m)$ posons $f^{-1}\{j\} = \bigcap_{\varphi \in f} \varphi^{-1}\{j\}$, $j \in \mathbb{Z}_{m+1}$. C'est par construction un fermé connexe de S^1 , distinct de S^1 , et s'il est non vide ses extrémités λ, μ sont dans \mathbb{Z}_{n+1} . La donnée de $f \in \text{Hom}(\Lambda_n, \Lambda_m)$ équivaut à celles d'intervalles $I_j (I_j = f^{-1}\{j\})$, $j \in \mathbb{Z}_{m+1}$ tels que :

- 1) Si $I_j \neq \emptyset$, I_j est de la forme $[\lambda, \mu]$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}_{n+1}$.
- 2) Les $I_j \cap \mathbb{Z}_{n+1}$ forment une partition de \mathbb{Z}_{n+1} .
- 3) Si $I_j = [\lambda, \mu] \neq \emptyset$, $I_{j+1} = \emptyset, \dots, I_{j'-1} = \emptyset$, $I_{j'} = [\lambda', \mu'] \neq \emptyset$ on a $\lambda' = \mu + 1$ dans \mathbb{Z}_{n+1} .

Pour $f \in \text{Hom}(\Lambda_n, \Lambda_m)$, soit $f^* \in \text{Hom}(\Lambda_m, \Lambda_n)$ tel que :

- a) $f^{*-1}\{k\} = \emptyset$ si aucun des intervalles $I_j = f^{-1}\{j\} = [\lambda_j, \mu_j]$ vérifie $\lambda_j = k$.
- b) $f^{*-1}\{\lambda_j\} = [i+1, j]$ où $i \in \tilde{f}(\mathbb{Z}_{n+1})$, $i+1, \dots, j-1 \notin \tilde{f}(\mathbb{Z}_{n+1})$

Lemme 1. L'application $f \rightarrow f^*$ définit un isomorphisme de la petite catégorie Λ sur la catégorie opposée Λ^o .

On n'a pas $f^{**} = f$ mais l'automorphisme $f \rightarrow f^{**}$ de Λ est intérieur. Nous laissons la vérification au lecteur. La structure de Λ est précisée par la décomposition $\Lambda = \Delta K$ (Lemme 2) où K désigne la sous catégorie de Λ dont les flèches sont les isomorphismes de Λ (K est donc la réunion des groupes cycliques $\mathbb{Z}_{n+1} = \text{Aut}(\Lambda_n)$), et où Δ est considérée comme une sous catégorie de Λ de la manière suivante : Pour tout n soit $\theta_n \in]\frac{n}{n+1}, 1[$ et soit $\alpha_n = \exp 2\pi i \theta_n \in S^1$. L'ensemble des classes d'homotopie d'applications continues croissantes φ de degré 1 de S^1 dans S^1 telles que $\varphi(\alpha_n) = \alpha_m$, et $\varphi(\mathbb{Z}_{n+1}) \subset \mathbb{Z}_{m+1}$ est identifié à $\text{Hom}(\Delta_n, \Delta_m)$ par l'application $\varphi \rightarrow \tilde{\varphi}$. Cette identification de Δ à une sous catégorie de Λ ne dépend pas du choix des α_n , de plus ;

Lemme 2. Toute flèche f de Λ s'écrit de manière unique $f = sk$, où $s \in \Delta$, $k \in K$.

L'existence de la décomposition résulte de la surjectivité de tout $\varphi \in f$ et de $\varphi(\mathbb{Z}_{n+1}) \subset \mathbb{Z}_{m+1}$. L'unicité est immédiate. En combinant les lemmes 1 et 2 on obtient la décomposition $\Delta = K\Delta^*$.

Définition 3. Soit C une catégorie, on appelle objet cyclique de C la donnée d'un foncteur covariant de Λ dans C .

On peut en particulier associer à toute catégorie C la catégorie $\text{Cycl}(C)$ des objets cycliques de C , dont les morphismes sont les morphismes des foncteurs. Si C est abélienne, il en est de même de $\text{Cycl}(C)$. Pour abréger, nous utiliserons la

terminologie $k(\Lambda)$ module pour désigner les objets cycliques dans la catégorie des espaces vectoriels sur un corps k .

III Le $k(\Lambda)$ -module A^h associé à une algèbre A .

Soit A une algèbre unifère. Pour tout $n \geq 0$ posons $A_n^h = A \otimes \dots \otimes A$ ($n+1$ termes), et définissons pour tout $f \in \text{Hom}(\Lambda_n, \Lambda_m)$ une application linéaire $T = A_f^h$ de A_n dans A_m par l'égalité :

$$T(x^0 \otimes \dots \otimes x^n) = y^0 \otimes \dots \otimes y^m.$$

où $y^j = 1$ si $f^{-1}\{j\} = \emptyset$ et $y^j = x^\lambda x^{\lambda+1} \dots x^\mu$ si $f^{-1}\{j\} = [\lambda, \mu]$.

On obtient ainsi un $k(\Lambda)$ -module A^h . Il est clair que tout homomorphisme $\rho: A \rightarrow B$ d'algèbres unifères définit un morphisme ρ^h de $k(\Lambda)$ -modules par l'égalité :

$$\rho^h(x^0 \otimes \dots \otimes x^n) = \rho(x^0) \otimes \dots \otimes \rho(x^n) \quad \forall x^i \in A.$$

Lorsque l'algèbre A est commutative $T = A_f^h$ ne dépend que de \tilde{f} et s'écrit $T(x^0 \otimes \dots \otimes x^n) = y^0 \otimes \dots \otimes y^m$, où $y^i = \prod_{\tilde{f}(j)=i} x^j$. Pour $A = k$ on obtient le $k(\Lambda)$ -module trivial k^h .

Proposition 4. L'application qui à toute trace τ sur A associe le morphisme

$\tau' \in \text{Hom}_{k(\Lambda)}(A^h, k^h)$ défini par :

$$\tau'(x^0 \otimes \dots \otimes x^n) = \tau(x^0 \dots x^n) \quad \forall x^i \in A,$$

est un isomorphisme de l'espace des traces sur A sur $\text{Hom}_{k(\Lambda)}(A^h, k^h)$.

Plus généralement, pour tout $k(\Lambda)$ -module E , l'espace $\text{Hom}_{k(\Lambda)}(E, k^h)$ s'identifie à l'espace des formes linéaires ℓ sur E_0 telles que $\ell_0(d^0)^* = \ell_0(d^1)^*$ où $(d^0)^*$, $(d^1)^*$ sont les deux éléments de $\text{Hom}(\Lambda_1, \Lambda_0)$.

Remarque 5. Par abus de notation nous continuerons à noter A^h le Λ -module (i.e. objet cyclique dans la catégorie des groupes abéliens) associé comme ci-dessus à un anneau unifère A .

IV Calcul de $\text{Ext}^n(\mathbb{Z}, E)$

Soient E un Λ -module et \mathbb{Z} le Λ -module trivial. Nous construisons un bicomplexe $(C^{n,m}, d_i)$ $n, m > 0$, $i = 1, 2$ de Λ -modules qui est une résolution projective du Λ -module trivial.

Pour $k \in \mathbb{N}$, soit C^k le Λ -module tel que :

a) C_n^k est le groupe abélien libre sur l'ensemble $\text{Hom}(\Lambda_k, \Lambda_n)$.

b) $\alpha e_\beta = e_{\alpha\beta} \quad \forall \alpha \in \Lambda$, où $\{e_\beta\}$ est la base canonique.

L'égalité $\text{Hom}_\Lambda(C^k, E) = E_k$ montre que C^k est un Λ -module projectif pour tout $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $\alpha \in \text{Hom}(\Lambda_k, \Lambda_{k'})$ l'égalité $C(\alpha)e_\beta = e_{\beta\alpha}$ détermine $C(\alpha) \in \text{Hom}_\Lambda(C^{k'}, C^k)$ et l'on a $C(\alpha\beta) = C(\beta)C(\alpha)$.

Posons $C^{n,m} = C^m \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$ et construisons d_i , $i = 1, 2$.

Construction de $d_1 : C^{n+1,m} \rightarrow C^{n,m}$

Elle n'invoque que les morphismes $C(\alpha)$ pour $\alpha \in K$ (i.e. α inversible dans Λ). Comme m est fixé, tous les $C^{n,m}$ sont égaux à C^m et le groupe cyclique $\mathbb{Z}_{/m+1} = \text{Aut}(\Lambda_m)$ agit sur C^m . Posons $T = (-1)^m C(1)$, où $1 \in \mathbb{Z}_{/m+1} = \text{Aut}(\Lambda_m)$ et $D = 1 - T$, $A = 1 + T + \dots + T^m$. Pour n pair posons $d_1^{n,m} = D$ et pour n impair $d_1^{n,m} = A$. On a par construction $d_1^2 = 0$, de plus le Lemme 2 montre que C^m est un $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{/m+1})$ module libre et donc (cf. [3]) que l'on a une longue suite exacte de Λ modules :

$$0 \leftarrow C^m /_{\text{Im } D} \leftarrow C^{0,m} \xleftarrow{d_1} C^{1,m} \xleftarrow{d_1} C^{2,m} \leftarrow \dots$$

Construction de $d_2 : C^{n,m+1} \rightarrow C^{n,m}$

Elle n'invoque que les $C(\alpha)$, $\alpha \in \Lambda$. Ceux-ci déterminent un objet simplicial X de la catégorie des Λ -modules. Notons alors $F_1^m : C^m \rightarrow C^{m-1}$ l'opérateur de face correspondant, on a $F_1^m = C(S_1^m)$ où S_1^m est l'injection croissante de $\{0, 1, \dots, m-1\}$ dans

$\{0, 1, \dots, m\}$ qui oublie i . Posons $b_m = \sum_{i=0}^m (-1)^i F_i^m$, i.e. considérons le complexe (non normalisé) associé au Λ -module simplicial ci-dessus. Pour n pair nous prendrons $d_2^{n,m} = b_{m+1} : C^{m+1} \rightarrow C^m$. Pour n impair, nous prendrons $d_2^{n,m} = -b'_{m+1} : C^{m+1} \rightarrow C^m$ où $b'_m = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i F_i^m$, ce qui correspond au Λ -module simplicial ΓX (cf. [4]).

Nous noterons $s : C^m \rightarrow C^{m+1}$ la flèche de dégénérescence : $D_m^m = C(s_m)$ où s_m est la surjection croissante de $\{0, 1, \dots, m+1\}$ sur $\{0, 1, \dots, m\}$ qui répète m . On a $b's + sb' = \text{id}$.

Lemme 6. $(C^{n,m}, d_i)$ est un complexe double de Λ -modules projectifs qui est une résolution du Λ -module trivial.

Dem : On a $d_1^2 = d_2^2 = 0$. Pour montrer que $d_1 d_2 = -d_2 d_1$ i.e. que $b'A = Ab$, $Db' = bD$, on utilise les égalités :

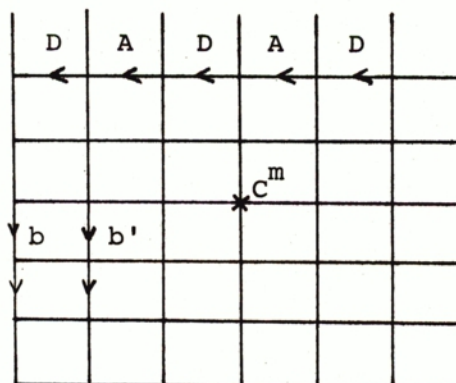
$$F_i^m = (-1)^i T_m^i F_0^m T_m^{-i} \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

$$T_m^{m+1} = 1.$$

Pour calculer l'homologie du bicomplexe (C, d) , il suffit de déterminer celle du complexe :

$$C^0 / \text{Im } D \xleftarrow{b} C^1 / \text{Im } D \xleftarrow{b} \dots$$

car la d_1 -homologie de (C, d) vaut $H_I^{n,m} = 0$ pour $n > 0$, et $H_I^{0,m} = C^m / \text{Im } D$



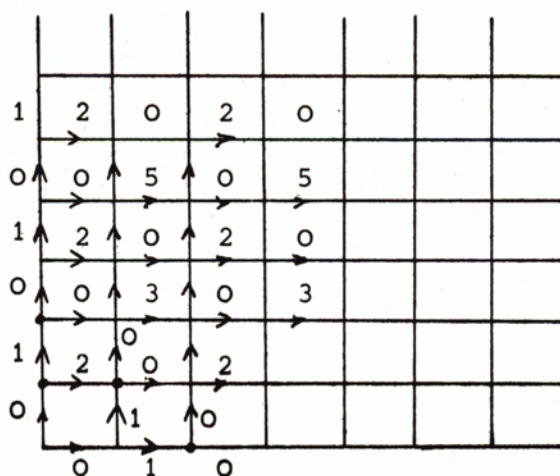
Le Lemme 2 montre que les classes f_α des e_α , $\alpha \in \Delta$ dans $C^m / \text{Im } D$ forment une base de ce groupe abélien libre. Ainsi le complexe de groupes abéliens :

$$C_{k/\text{Im } D}^0 \xleftarrow{D} C_{k/\text{Im } D}^1 \xleftarrow{D} \dots$$

coïncide avec le complexe (non normalisé) associé à l'ensemble simplicial B^k suivant : pour tout n , B_n^k est l'ensemble des applications croissantes de $\{0, 1, \dots, k\}$ dans $\{0, 1, \dots, n\}$, et l'action de Δ est par composition à droite. Ainsi (la réalisation géométrique de B^k étant la boule de dimension k), l'homologie du complexe ci-dessus est nulle sauf en dimension 0 où elle est égale à \mathbb{Z} . On en déduit que l'homologie du bicomplexe (C, d) est nulle sauf en dimension 0 où elle donne le Λ -module trivial \mathbb{Z}^h . ■

Corollaire 7. L'anneau $\text{Ext}_\Lambda^*(\mathbb{Z}^h, \mathbb{Z}^h)$ est un anneau de polynomes $\mathbb{Z}[\sigma]$, où le générateur σ est de degré 2.

Dem : Il s'agit de calculer la cohomologie du bicomplexe de groupes abéliens obtenu en appliquant à $(C^{n,m}, d_i)$ le foncteur $\text{Hom}_\Lambda(., \mathbb{Z}^h)$. Pour tout n, m on a $\text{Hom}_\Lambda(C^{n,m}, \mathbb{Z}^h) = (\mathbb{Z}^h)_m = \mathbb{Z}$. En calculant les flèches on obtient le bicomplexe suivant :



Il est clair que sa cohomologie H^n vaut 0 pour n impair et est égale à \mathbb{Z} pour n pair avec pour générateur le cocycle dont la seule composante non nulle est

au point $(n,0)$ et vaut $1 \in \mathbb{Z}$. Soit σ le générateur ainsi obtenu pour H^2 , il définit un élément σ de $\text{Ext}_{\Lambda}^2(\mathbb{Z}^h, \mathbb{Z}^h)$ et le corollaire résulte donc de :

Lemme 8. Pour tout Λ -module E la translation $(n,m) \rightarrow (n+2,m)$ définit un endomorphisme du bicomplexe $\text{Hom}_{\Lambda}(C,E)$ et donc un endomorphisme (de degré 2) S du groupe abélien gradué $\text{Ext}_{\Lambda}^*(\mathbb{Z}^h, E)$. Cet endomorphisme S coïncide avec le produit (de Yodena) par $\sigma \in \text{Ext}_{\Lambda}^2(\mathbb{Z}^h, \mathbb{Z}^h)$.

Remarque 9. On vérifie de même que les groupes $\text{Tor}_{\Lambda}^n(\mathbb{Z}^h, \mathbb{Z}^h)$ sont obtenus comme homologie du bicomplexe transposé du bicomplexe ci-dessus. Ils sont donc égaux à \mathbb{Z} pour n pair et nuls pour n impair.

Rappelons que l'espace classifiant d'une petite catégorie a été introduit par Grothendieck [7] (cf. aussi [11]).

Théorème 10. L'espace classifiant $B\Lambda$ de la petite catégorie Λ est égal à $BS^1 = P_{\infty}(\mathbb{C})$

Dem : Comme l'ensemble $\text{Hom}(\Lambda_n, \Lambda_m)$ n'est jamais vide, l'espace $B\Lambda$ est connexe. Comme $\text{Hom}(\Lambda_0, \Lambda_0)$ est réduit à 1 élément, tout foncteur de Λ dans la catégorie des ensembles avec pour flèches les bijections est trivial. Ainsi (cf. [11]) $B\Lambda$ est simplement connexe. D'après ([11] p.10) et le corollaire 7, l'anneau de cohomologie $H^*(B\Lambda, \mathbb{Z})$ est égal à $\mathbb{Z}[\sigma]$, $\sigma \in H^2(B\Lambda, \mathbb{Z})$. De même, d'après la remarque 8, l'homologie de $B\Lambda$ est sans torsion et la dualité canonique fait de $H^n(B\Lambda, \mathbb{Z})$ le groupe $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n, \mathbb{Z})$. Il en résulte que si f est l'application continue de $B\Lambda$ dans l'espace $K(\mathbb{Z}, 2)$ égal à $P_{\infty}(\mathbb{C})$ qui correspond à $\sigma \in H^2(B\Lambda, \mathbb{Z})$, l'application $f_* : H_n(B\Lambda, \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(P_{\infty}(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ est un isomorphisme pour toute valeur de n . Ainsi le théorème de Whitehead (cf. [12]) montre que $\prod_n (B\Lambda) = \prod_n (P_{\infty}(\mathbb{C}))$ et donc $B\Lambda$ est un $K(\mathbb{Z}, 2)$ et est homotope à $P_{\infty}(\mathbb{C}) = BS^1$. ■

Remarquons qu'il n'existe aucun homomorphisme non trivial de Λ dans le groupe S

Soit k un corps commutatif de caractéristique nulle. Utilisant le Lemme 6 pour obtenir une résolution injective du $k(\Lambda)$ -module trivial k^h on a :

Théorème 11. Pour toute k -algèbre A les groupes $H_\Lambda^n(A)$ de cohomologie cyclique de A sont canoniquement isomorphes aux groupes $\text{Ext}_{k(\Lambda)}^n(A^h, k^h)$.

V Le couple exact reliant $\text{Ext}_\Lambda(\mathbb{Z}^h, E)$ à $\text{Ext}_\Delta(\mathbb{Z}^h, E)$.

Nous utiliserons la terminologie Δ -module pour désigner un groupe abélien cosimplicial. Pour expliciter l'homomorphisme de restriction I de $\text{Ext}_\Lambda^n(\mathbb{Z}^h, E)$ vers $\text{Ext}_\Delta^n(\mathbb{Z}^h, E)$ qui correspond à l'inclusion $\Delta \subset \Lambda$ construisons un morphisme de la résolution projective naturelle (P^k, b) du Δ -module trivial vers la restriction à Δ du bicomplexe $(C^{n,m}, d_1)$. Par construction P_n^k est le groupe abélien libre de base (f_α) , α application croissante de $\{0, \dots, k\}$ dans $\{0, \dots, n\}$ et Δ agit à gauche sur $P^k : \alpha f_\beta = f_{\alpha\beta}$. Le complexe (P^k, b) est obtenu à partir du Δ -module simplicial P . Il est clair que l'égalité $I(f_\alpha) = e_\alpha \in C^{0,k}$, définit un morphisme du complexe (P^k, b) vers le bicomplexe $(C^{n,m}, d_1)$ restreint à Δ , et induit l'identité en homologie.

Construction de B : $\text{Ext}_\Delta^n(\mathbb{Z}^h, E) \rightarrow \text{Ext}_\Lambda^{n-1}(\mathbb{Z}^h, E)$

Le Lemme 6 montre que $\text{Ext}_\Lambda^n(\mathbb{Z}^h, E)$ est le n ième groupe de cohomologie du bicomplexe $\text{Hom}_\Lambda(C^{n,m}, E), d_1^t$. L'égalité $b's + sb' = \text{id}$ montre que la d_2^t cohomologie de ce bicomplexe vaut $H_{II}^{n,m} = 0$ pour n impair. De plus, l'égalité $\text{Hom}_\Delta(P^k, E) = \text{Hom}_\Lambda(C^k, E) = E_k$ montre que pour n pair on a :

$$H_{II}^{n,m} = \text{Ext}_\Delta^m(\mathbb{Z}^h, E) .$$

Ainsi la restriction à H_{II} du bord d_1^t est nulle et $H_I H_{II} = H_{II}$. Le calcul de la différentielle, de degré $(2, -1)$, du terme E_2 de la suite spectrale associée à la première filtration donne naissance à un opérateur

$$B : \text{Ext}_\Delta^n(\mathbb{Z}^h, E) \rightarrow \text{Ext}_\Lambda^{n-1}(\mathbb{Z}^h, E)$$

A tout cocycle $\varphi \in \text{Hom}_{\Delta}(P^m, E) = E_m = \text{Hom}_{\Delta}(C^m, E)$, l'opérateur B associe le cocycle $(\psi_{i,j})$ du bicomplexe $X^{n,m} = \text{Hom}(C^{n,m}, E) = E^m$, tel que :

$$\psi_{(i,j)} = 0 \text{ pour } (i,j) \neq (0, n-1) \text{ et } \psi_{(0, n-1)} = A^t s^t D^t \varphi.$$

Le théorème 37 que nous avons obtenu dans [6] se reformule alors ainsi :

Théorème 12. Pour tout Λ -module E on a un couple exact :

$$\begin{array}{ccc} & \text{Ext}_{\Delta}^*(\mathbb{Z}^h, E) & \\ B \swarrow & & \searrow I \\ \text{Ext}_{\Delta}^*(\mathbb{Z}^h, E) & \xrightarrow{\quad S \quad} & \text{Ext}_{\Delta}^*(\mathbb{Z}^h, E) \end{array}$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M.F. ATIYAH, "Global theory of elliptic operators". Proc. Inter. Conf. on Funct. Analysis, University of Tokyo Press, Tokyo 1970.
- [2] L. BROWN, R. DOUGLAS, P. FILLMORE, "Extension of C^* -algebras and K-homology", Annals of Math. (2) 105 (1977), p. 265-324.
- [3] H. CARTAN et S. EILENBERG, "Homological algebra", Princeton University Press, (1956).
- [4] P. CARTIER, "Structures simpliciales", Séminaire Bourbaki, 12^{ème} Année, n°199, (1959/60).
- [5] A. CONNES, "Non commutative differential geometry", Part I, "The Chern character in K-homology", Preprint IHES (1982).
- [6] A. CONNES, "Non commutative differential geometry", Part II, "De Rham homology and non commutative algebra", Preprint IHES (1983).
- [7] A. GROTHENDIECK, "Théorie de la descente", Séminaire Bourbaki, n°195, (1959/60).
- [8] I.I. KASPAROV, "K-functor and extensions of C^* -algebras", Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Mat. n°44, (1980), p. 571-636.
- [9] J.L. LODAY et D. QUILLEN, "Homologie cyclique et homologie de l'algèbre de Lie des matrices", Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Janvier 1983.
- [10] S. MAC LANE, "Homology", Springer-Verlag Berlin, Gottingen-Heidelberg, (1963).
- [11] D. QUILLEN, "Higher algebraic K-theory I". Lecture Notes in Math., Vol. 341.
- [12] E. SPANIER, "Algebraic topology", Mc Graw Hill.