

# COHOMOLOGIE CYCLIQUE ET FONCTEURS EXT<sup>n</sup>.

Alain CONNES

Résumé : Nous construisons un foncteur  $A \rightarrow A^{\natural}$  de la catégorie des algèbres (non commutatives) sur un corps  $k$ , dans une catégorie abélienne, et montrons que la cohomologie cyclique  $H_{\lambda}^n(A)$  que nous avons introduite et étudiée dans [5],[6] coïncide avec  $\text{Ext}^n(A^{\natural}, k^{\natural})$ . On en déduit une définition naturelle de la théorie bivariante (et de la cohomologie cyclique d'un anneau). La catégorie abélienne que nous utilisons est celle des  $k$ -espaces vectoriels cycliques. La notion d'objet cyclique dans une catégorie arbitraire est voisine de celle d'objet simplicial. Le rôle de la catégorie  $\Delta$  des ensembles totalement ordonnés finis est tenu par une petite catégorie  $\Lambda$  qui contient à la fois  $\Delta$  et les groupes cycliques finis. Nous montrons que le classifiant  $B\Lambda$  est égal à  $P_{\infty}(\mathbb{C}) = BS^1$ .

Summary : We construct a functor  $A \rightarrow A^{\natural}$  from the category of (non commutative) algebras over a field  $k$ , to an abelian category and show that the cyclic cohomology  $H_{\lambda}^n(A)$ , which we introduced and studied in [5],[6] coincides with  $\text{Ext}^n(A^{\natural}, k^{\natural})$ . A natural definition of the bivariant theory follows. The abelian category used above is the category of cyclic vector spaces. The notion of cyclic object in a category is analogous to the notion of simplicial object. The category  $\Delta$  of totally ordered finite sets is replaced by a small category  $\Lambda$  containing  $\Delta$  and all cyclic finite groups. We show that the classifying space  $B\Lambda$  is equal to  $P_{\infty}(\mathbb{C}) = BS^1$ .

Institut des Hautes Etudes Scientifiques  
35, route de Chartres  
91440 - Bures-sur-Yvette (France)

June 1983

IHES/83/M/34

## I. Introduction.

Dans [8], G.G. Kasparov a défini dans le cadre des  $C^*$ -algèbres la  $K$  théorie bivariante  $KK(A, B)$  groupe abélien contravariant en  $A$  et covariant en  $B$  (où  $A$  et  $B$  sont des  $C^*$ -algèbres). Pour  $A = \mathbb{C}$  ce foncteur se réduit à la  $K$  théorie  $K_0(B)$  et pour  $B = \mathbb{C}$  à la  $K$  homologie de  $A$ , qui aux nuances près a été introduite par Brown Douglas Fillmore [2] et Atiyah [1].

La propriété principale du bifoncteur  $KK(A, B)$  est l'existence d'un cup produit :  $KK(A, B) \times KK(B, C) \rightarrow KK(A, C)$  (cf. [8]). Ce produit a les mêmes propriétés formelles que le produit de Yoneda

$$\text{Ext}^n(M, N) \times \text{Ext}^m(N, P) \rightarrow \text{Ext}^{n+m}(M, P)$$

en algèbre homologique (cf. [10] III 5), mais bien entendu la catégorie des  $C^*$ -algèbres n'étant pas additive, la notion de foncteur dérivé de  $\text{Hom}(A, B)$  n'y a pas de sens.

Dans [5], la construction, au niveau algébrique, du caractère de Chern en  $K$  homologie nous a dicté la définition suivante de la cohomologie cyclique  $H_\lambda^n(A)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , d'une algèbre non commutative arbitraire  $A$  sur  $\mathbb{C}$ . C'est la cohomologie du complexe de cochaines  $(C_\lambda, b)$  où :

a)  $C_\lambda^n(A)$  est l'espace des formes  $n+1$  linéaires  $\varphi$  sur  $A$  telles que

$$\varphi(x^1, \dots, x^n, x^0) = (-1)^n \varphi(x^0, \dots, x^n) \quad \forall x^i \in A$$

b)  $b : C_\lambda^n \rightarrow C_\lambda^{n+1}$  est donné par :

$$(b\varphi)(x^0, \dots, x^{n+1}) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \varphi(x^0, \dots, x^i x^{i+1}, \dots, x^{n+1}) + (-1)^{n+1} \varphi(x^{n+1} x^0, \dots, x^n)$$

Dans [6], nous avons montré comment relier la cohomologie cyclique  $H_\lambda^*(A)$  à la cohomologie de Hochschild  $H^*(A, A^*)$  de  $A$  à coefficients dans le bimodule  $A^*$  des formes linéaires sur  $A$ . La relation s'exprime par un opérateur de périodicité de degré 2 :  $S : H_\lambda^n(A) \rightarrow H_\lambda^{n+2}(A)$  et un couple exact :

$$\begin{array}{ccc} & H^*(A, A^*) & \\ B \swarrow & & \uparrow I \\ H_\lambda^*(A) & \xrightarrow{S} & H_\lambda^*(A) \end{array}$$

Comme on dispose, pour calculer la cohomologie de Hochschild, des outils de l'algèbre homologique, le couple exact ci-dessus nous a permis de terminer le calcul de  $H_\lambda^*(A)$  dans quelques exemples importants : ([6]).

Le but de cette note est de montrer que les foncteurs  $H_\lambda^n(A)$  sont des cas particuliers des foncteurs  $\text{Ext}^n$  de l'algèbre homologique, ce qui nous donnera :

- 1) Une définition naturelle de la théorie bivariante et du produit.
- 2) Une définition naturelle de  $H_\lambda^n(A)$  quand  $A$  n'est plus une  $\mathbb{C}$  algèbre mais est un anneau (non commutatif).

Nous montrons également que le couple exact ci-dessus se prolonge dans le cadre 2).

Il reste à prolonger au cadre bivariant la définition du caractère de Chern de [5] et à montrer sa compatibilité avec le produit. La catégorie des algèbres et homomorphismes n'est pas additive mais nous construisons un foncteur  $A \rightarrow A^\natural$  de cette catégorie dans la catégorie abélienne des espaces vectoriels cycliques, de telle sorte que  $H_\lambda^n(A) = \text{Ext}^n(A^\natural, \mathbb{C}^\natural)$ , pour toute algèbre  $A$ .

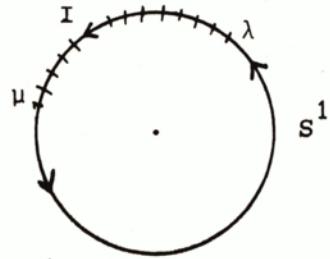
## II Objet cyclique dans une catégorie.

La notion d'objet cyclique dans une catégorie arbitraire est analogue à celle d'objet simplicial. Rappelons qu'un objet simplicial d'une catégorie  $\mathcal{C}$  est la donnée d'un foncteur contravariant de  $\Delta$  dans  $\mathcal{C}$ , où  $\Delta$  est la catégorie dont les objets

sont les ensembles finis totalement ordonnés non vides et les flèches les applications croissantes au sens large ([4]).

La notion d'objet cyclique s'obtient en remplaçant  $\Delta$  par la petite catégorie  $\Lambda$  dont les objets  $\Lambda_n$  sont indexés par  $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  et dont les flèches  $f \in \text{Hom}(\Lambda_n, \Lambda_m)$  sont les classes d'homotopie d'applications continues croissantes  $\varphi$  de degré 1 de  $S^1$  dans  $S^1$  telles que  $\varphi(\mathbb{Z}_{n+1}) \subset \mathbb{Z}_{m+1}$ . Ici  $S^1 = \{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1\}$  et pour tout  $n$ ,  $\mathbb{Z}_n$  désigne le sous-groupe formé des racines  $n$  ièmes de 1.

Il est clair que  $\text{Hom}(\Lambda_n, \Lambda_m)$  est fini pour tous  $n, m$  et que pour  $\lambda \in \mathbb{Z}_{n+1}$  la valeur de  $\varphi(\lambda)$  ne dépend pas du choix de  $\varphi$  dans la classe de  $f$ , notons la  $\tilde{f}(\lambda)$ . On obtient ainsi un foncteur  $f \rightarrow \tilde{f}$  de  $\Lambda$  dans la catégorie des ensembles. On vérifie que si  $\tilde{f}$  n'est pas une application constante elle détermine uniquement  $f$ , mais qu'il existe  $n+1$  éléments  $f \in \text{Hom}(\Lambda_n, \Lambda_m)$  tels que  $\tilde{f}$  soit l'application constante  $\tilde{f}(i) = j \quad \forall i \in \mathbb{Z}_{n+1}$ . Cela montre en particulier que  $\Lambda_0$  n'est pas un objet final de  $\Lambda$ . Orientons  $S^1$  (dans le sens trigonométrique) et associons à tout couple  $\lambda, \mu \in S^1$  le fermé connexe  $I = [\lambda, \mu] \quad I \subset S^1, I \neq S^1$ .



Pour  $f \in \text{Hom}(\Lambda_n, \Lambda_m)$  posons  $f^{-1}\{j\} = \bigcap_{\varphi \in f} \varphi^{-1}\{j\}, \quad j \in \mathbb{Z}_{m+1}$ . C'est par construction un fermé connexe de  $S^1$ , distinct de  $S^1$ , et s'il est non vide ses extrémités  $\lambda, \mu$  sont dans  $\mathbb{Z}_{n+1}$ . La donnée de  $f \in \text{Hom}(\Lambda_n, \Lambda_m)$  équivaut à celles d'intervalles  $I_j$  ( $I_f = f^{-1}\{j\}$ ),  $j \in \mathbb{Z}_{m+1}$  tels que :

- 1) Si  $I_j \neq \emptyset$ ,  $I_j$  est de la forme  $[\lambda, \mu]$  avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}_{n+1}$ .
- 2) Les  $I_j \cap \mathbb{Z}_{n+1}$  forment une partition de  $\mathbb{Z}_{n+1}$ .
- 3) Si  $I_j = [\lambda, \mu] \neq \emptyset, I_{j+1} = \emptyset, \dots, I_{j'-1} = \emptyset, I_{j'} = [\lambda', \mu'] \neq \emptyset$  on a  $\lambda' = \mu + 1$  dans  $\mathbb{Z}_{n+1}$ .

Pour  $f \in \text{Hom}(\Lambda_n, \Lambda_m)$ , soit  $f^* \in \text{Hom}(\Lambda_m, \Lambda_n)$  tel que :

- a)  $f^{*-1}\{k\} = \emptyset$  si aucun des intervalles  $I_j = f^{-1}\{j\} = [\lambda_j, \mu_j]$  vérifie  $\lambda_j = k$ .
- b)  $f^{*-1}\{\lambda_j\} = [i+1, j]$  où  $i \in \tilde{f}(Z_{n+1})$ ,  $i+1, \dots, j-1 \notin \tilde{f}(Z_{n+1})$

Lemme 1. L'application  $f \rightarrow f^*$  définit un isomorphisme de la petite catégorie  $\Lambda$  sur la catégorie opposée  $\Lambda^\circ$ .

On n'a pas  $f^{**} = f$  mais l'automorphisme  $f \rightarrow f^{**}$  de  $\Lambda$  est intérieur. Nous laissons la vérification au lecteur. La structure de  $\Lambda$  est précisée par la décomposition  $\Lambda = \Delta K$  (Lemme 2) où  $K$  désigne la sous catégorie de  $\Lambda$  dont les flèches sont les isomorphismes de  $\Lambda$  ( $K$  est donc la réunion des groupes cycliques  $Z_{n+1} = \text{Aut}(\Lambda_n)$ ), et où  $\Delta$  est considérée comme une sous catégorie de  $\Lambda$  de la manière suivante : Pour tout  $n$  soit  $\theta_n \in \frac{n}{n+1}$ , et soit  $\alpha_n = \exp 2\pi i \theta_n \in S^1$ . L'ensemble des classes d'homotopie d'applications continues croissantes  $\varphi$  de degré 1 de  $S^1$  dans  $S^1$  telles que  $\varphi(\alpha_n) = \alpha_m$ , et  $\varphi(Z_{n+1}) \subset Z_{m+1}$  est identifié à  $\text{Hom}(\Delta_n, \Delta_m)$  par l'application  $\varphi \rightarrow \tilde{\varphi}$ . Cette identification de  $\Delta$  à une sous catégorie de  $\Lambda$  ne dépend pas du choix des  $\alpha_n$ , de plus ;

Lemme 2. Toute flèche  $f$  de  $\Lambda$  s'écrit de manière unique  $f = sk$ , où  $s \in \Delta$ ,  $k \in K$ .

L'existence de la décomposition résulte de la surjectivité de tout  $\varphi \in f$  et de  $\varphi(Z_{n+1}) \subset Z_{m+1}$ . L'unicité est immédiate. En combinant les lemmes 1 et 2 on obtient la décomposition  $\Delta = K\Delta^*$ .

Définition 3. Soit  $C$  une catégorie, on appelle objet cyclique de  $C$  la donnée d'un foncteur covariant de  $\Lambda$  dans  $C$ .

On peut en particulier associer à toute catégorie  $C$  la catégorie  $\text{Cycl}(C)$  des objets cycliques de  $C$ , dont les morphismes sont les morphismes des foncteurs. Si  $C$  est abélienne, il en est de même de  $\text{Cycl}(C)$ . Pour abréger, nous utiliserons la

terminologie  $k(\Lambda)$  module pour désigner les objets cycliques dans la catégorie des espaces vectoriels sur un corps  $k$ .

### III Le $k(\Lambda)$ -module $A^{\natural}$ associé à une algèbre $A$ .

Soit  $A$  une algèbre unifère. Pour tout  $n \geq 0$  posons  $A_n^{\natural} = A \otimes \dots \otimes A$  ( $n+1$  termes), et définissons pour tout  $f \in \text{Hom}(\Lambda_n, \Lambda_m)$  une application linéaire  $T = A_f^{\natural}$  de  $A_n$  dans  $A_m$  par l'égalité :

$$T(x^0 \otimes \dots \otimes x^n) = y^0 \otimes \dots \otimes y^m.$$

où  $y^j = 1$  si  $f^{-1}\{j\} = \emptyset$  et  $y^j = x^{\lambda} x^{\lambda+1} \dots x^{\mu}$  si  $f^{-1}\{j\} = [\lambda, \mu]$ .

On obtient ainsi un  $k(\Lambda)$ -module  $A^{\natural}$ . Il est clair que tout homomorphisme  $\rho : A \rightarrow B$  d'algèbres unifères définit un morphisme  $\rho^{\natural}$  de  $k(\Lambda)$ -modules par l'égalité :

$$\rho^{\natural}(x^0 \otimes \dots \otimes x^n) = \rho(x^0) \otimes \dots \otimes \rho(x^n). \quad \forall x^i \in A.$$

Lorsque l'algèbre  $A$  est commutative  $T = A_f^{\natural}$  ne dépend que de  $\tilde{f}$  et s'écrit  $T(x^0 \otimes \dots \otimes x^n) = y^0 \otimes \dots \otimes y^m$ , où  $y^i = \prod_{\tilde{f}(j)=i} x^j$ . Pour  $A = k$  on obtient le  $k(\Lambda)$ -module trivial  $k^{\natural}$ .

Proposition 4. L'application qui à toute trace  $\tau$  sur  $A$  associe le morphisme  $\tau' \in \text{Hom}_{k(\Lambda)}(A^{\natural}, k^{\natural})$  défini par :

$$\tau'(x^0 \otimes \dots \otimes x^n) = \tau(x^0 \dots x^n) \quad \forall x^i \in A,$$

est un isomorphisme de l'espace des traces sur  $A$  sur  $\text{Hom}_{k(\Lambda)}(A^{\natural}, k^{\natural})$ .

Plus généralement, pour tout  $k(\Lambda)$ -module  $E$ , l'espace  $\text{Hom}_{k(\Lambda)}(E, k^{\natural})$  s'identifie à l'espace des formes linéaires  $\ell$  sur  $E_0$  telles que  $\ell_0(d^0)^* = \ell_0(d^1)^*$  où  $(d^0)^*$ ,  $(d^1)^*$  sont les deux éléments de  $\text{Hom}(\Lambda_1, \Lambda_0)$ .

Remarque 5. Par abus de notation nous continuerons à noter  $A^{\natural}$  le  $\Lambda$ -module (i.e. objet cyclique dans la catégorie des groupes abéliens) associé comme ci-dessus à un anneau unifère  $A$ .

#### IV Calcul de $\text{Ext}^n(\mathbb{Z}, E)$

Soient  $E$  un  $\Lambda$ -module et  $\mathbb{Z}$  le  $\Lambda$ -module trivial. Nous construisons un bicomplexe  $(C^{n,m}, d_i)$   $n, m > 0$ ,  $i = 1, 2$  de  $\Lambda$ -modules qui est une résolution projective du  $\Lambda$ -module trivial.

Pour  $k \in \mathbb{N}$ , soit  $C^k$  le  $\Lambda$ -module tel que :

a)  $C_n^k$  est le groupe abélien libre sur l'ensemble  $\text{Hom}(\Lambda_k, \Lambda_n)$ .

b)  $\alpha e_\beta = e_{\alpha\beta} \quad \forall \alpha \in \Lambda, \text{ où } \{e_\beta\}$  est la base canonique.

L'égalité  $\text{Hom}_\Lambda(C^k, E) = E_k$  montre que  $C^k$  est un  $\Lambda$ -module projectif pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $\alpha \in \text{Hom}(\Lambda_k, \Lambda_k)$  l'égalité  $C(\alpha)e_\beta = e_{\beta \circ \alpha}$  détermine  $C(\alpha) \in \text{Hom}_\Lambda(C^k, C^k)$  et l'on a  $C(\alpha\beta) = C(\beta)C(\alpha)$ .

Posons  $C^{n,m} = C^m \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$  et construisons  $d_i$ ,  $i = 1, 2$ .

Construction de  $d_1$  :  $C^{n+1, m} \rightarrow C^{n, m}$ .

Elle n'invoque que les morphismes  $C(\alpha)$  pour  $\alpha \in K$  (i.e.  $\alpha$  inversible dans  $\Lambda$ ).

Comme  $m$  est fixé, tous les  $C^{n,m}$  sont égaux à  $C^m$  et le groupe cyclique

$\mathbb{Z}_{/m+1} = \text{Aut}(\Lambda_m)$  agit sur  $C^m$ . Posons  $T = (-1)^m C(1)$ , où  $1 \in \mathbb{Z}_{/m+1} = \text{Aut}(\Lambda_m)$  et  $D = 1 - T$ ,  $A = 1 + T + \dots + T^m$ . Pour  $n$  pair posons  $d_1^{n,m} = D$  et pour  $n$  impair  $d_1^{n,m} = A$ . On a par construction  $d_1^2 = 0$ , de plus le Lemme 2 montre que  $C^m$  est un  $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{/m+1})$  module libre et donc (cf. [3]) que l'on a une longue suite exacte de  $\Lambda$  modules :

$$0 \leftarrow C^m / \text{Im } D \leftarrow C^{0,m} \xleftarrow{d_1} C^{1,m} \xleftarrow{d_1} C^{2,m} \leftarrow \dots$$

Construction de  $d_2$  :  $C^{n,m+1} \rightarrow C^{n,m}$ .

Elle n'invoque que les  $C(\alpha)$ ,  $\alpha \in \Delta$ . Ceux-ci déterminent un objet simplicial  $X$  de la catégorie des  $\Lambda$ -modules. Notons alors  $F_i^m : C^m \rightarrow C^{m-1}$  l'opérateur de face correspondant, on a  $F_i^m = C(S_i^m)$  où  $S_i^m$  est l'injection croissante de  $\{0, 1, \dots, m-1\}$  dans

$\{0, 1, \dots, m\}$  qui oublie  $i$ . Posons  $b_m = \sum_{i=0}^m (-1)^i F_i^m$ , i.e. considérons le complexe (non normalisé) associé au  $\Lambda$ -module simplicial ci-dessus. Pour  $n$  pair nous prendrons  $d_2^{n,m} = b_{m+1} : C^{m+1} \rightarrow C^m$ . Pour  $n$  impair, nous prendrons  $d_2^{n,m} = -b'_{m+1} : C^{m+1} \rightarrow C^m$  où  $b'_m = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i F_i^m$ , ce qui correspond au  $\Lambda$ -module simplicial  $\Gamma_X$  (cf. [4]).

Nous noterons  $s : C^m \rightarrow C^{m+1}$  la flèche de dégénérescence :  $D_m^m = C(s_m)$  où  $s_m$  est la surjection croissante de  $\{0, 1, \dots, m+1\}$  sur  $\{0, 1, \dots, m\}$  qui répète  $m$ . On a  $b's + sb' = id$ .

Lemme 6.  $(C^{n,m}, d_i)$  est un complexe double de  $\Lambda$ -modules projectifs qui est une résolution du  $\Lambda$ -module trivial.

Dem : On a  $d_1^2 = d_2^2 = 0$ . Pour montrer que  $d_1 d_2 = -d_2 d_1$  i.e. que  $b'A = Ab$ ,  $Db' = bD$ , on utilise les égalités :

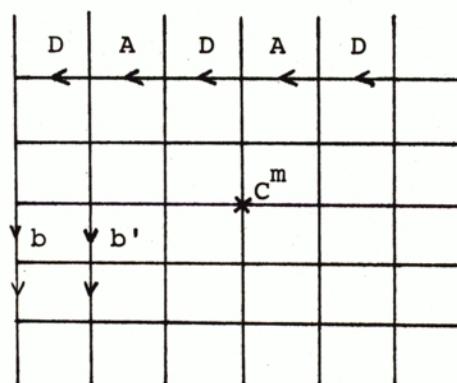
$$F_i^m = (-1)^i T_m^i F_0^m T_m^{-i} \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

$$T_m^{m+1} = 1.$$

Pour calculer l'homologie du bicomplexe  $(C, d)$ , il suffit de déterminer celle du complexe :

$$C^0 / \text{Im } D \xleftarrow{b} C^1 / \text{Im } D \xleftarrow{b} \dots$$

car la  $d_1$ -homologie de  $(C, d)$  vaut  $H_I^{n,m} = 0$  pour  $n > 0$ , et  $H_I^{0,m} = C^m / \text{Im } D$



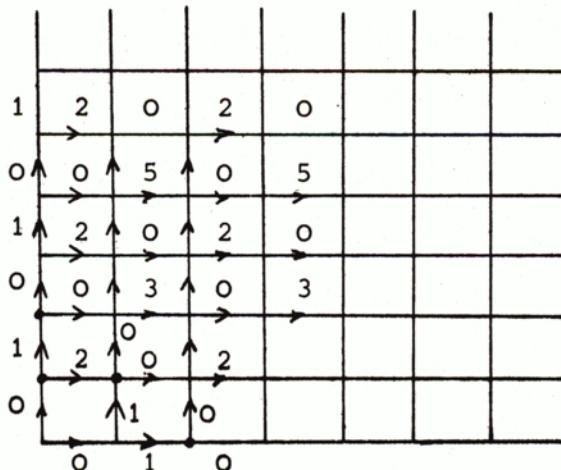
Le Lemme 2 montre que les classes  $f_\alpha$  des  $e_\alpha$ ,  $\alpha \in \Delta$  dans  $C^m_{k/\text{Im } D}$  forment une base de ce groupe abélien libre. Ainsi le complexe de groupes abéliens :

$$C_{k/\text{Im } D}^0 \xleftarrow{b} C_{k/\text{Im } D}^1 \xleftarrow{\dots}$$

coincide avec le complexe (non normalisé) associé à l'ensemble simplicial  $B^k$  suivant : pour tout  $n$ ,  $B_n^k$  est l'ensemble des applications croissantes de  $\{0, 1, \dots, k\}$  dans  $\{0, 1, \dots, n\}$ , et l'action de  $\Delta$  est par composition à droite. Ainsi (la réalisation géométrique de  $B^k$  étant la boule de dimension  $k$ ), l'homologie du complexe ci-dessus est nulle sauf en dimension 0 où elle est égale à  $\mathbb{Z}$ . On en déduit que l'homologie du bicomplexe  $(C, d)$  est nulle sauf en dimension 0 où elle donne le  $\Lambda$ -module trivial  $\mathbb{Z}^\frac{1}{2}$ . ■

Corollaire 7. L'anneau  $\text{Ext}_\Lambda^*(\mathbb{Z}^\frac{1}{2}, \mathbb{Z}^\frac{1}{2})$  est un anneau de polynomes  $\mathbb{Z}[\sigma]$ , où le générateur  $\sigma$  est de degré 2.

Dem : Il s'agit de calculer la cohomologie du bicomplexe de groupes abéliens obtenu en appliquant à  $(C^{n,m}, d_i)$  le foncteur  $\text{Hom}_\Lambda(., \mathbb{Z}^\frac{1}{2})$ . Pour tout  $n, m$  on a  $\text{Hom}_\Lambda(C^{n,m}, \mathbb{Z}^\frac{1}{2}) = (\mathbb{Z}^\frac{1}{2})_m = \mathbb{Z}$ . En calculant les flèches on obtient le bicomplexe suivant :



Il est clair que sa cohomologie  $H^n$  vaut 0 pour  $n$  impair et est égale à  $\mathbb{Z}$  pour  $n$  pair avec pour générateur le cocycle dont la seule composante non nulle est

au point  $(n,0)$  et vaut  $1 \in \mathbb{Z}$ . Soit  $\sigma$  le générateur ainsi obtenu pour  $H^2$ , il définit un élément  $\sigma$  de  $\text{Ext}_{\Lambda}^2(\mathbb{Z}^{\frac{1}{2}}, \mathbb{Z}^{\frac{1}{2}})$  et le corollaire résulte donc de :

Lemme 8. Pour tout  $\Lambda$ -module  $E$  la translation  $(n,m) \mapsto (n+2,m)$  définit un endomorphisme du bicomplexe  $\text{Hom}_{\Lambda}(C,E)$  et donc un endomorphisme (de degré 2)  $S$  du groupe abélien gradué  $\text{Ext}_{\Lambda}^*(\mathbb{Z}^{\frac{1}{2}}, E)$ . Cet endomorphisme  $S$  coïncide avec le produit (de Yodena) par  $\sigma \in \text{Ext}_{\Lambda}^2(\mathbb{Z}^{\frac{1}{2}}, \mathbb{Z}^{\frac{1}{2}})$ .

Remarque 9. On vérifie de même que les groupes  $\text{Tor}_{\Lambda}^n(\mathbb{Z}^{\frac{1}{2}}, \mathbb{Z}^{\frac{1}{2}})$  sont obtenus comme homologie du bicomplexe transposé du bicomplexe ci-dessus. Ils sont donc égaux à  $\mathbb{Z}$  pour  $n$  pair et nuls pour  $n$  impair.

Rappelons que l'espace classifiant d'une petite catégorie a été introduit par Grothendieck [7] (cf. aussi [11]).

Théorème 10. L'espace classifiant  $B\Lambda$  de la petite catégorie  $\Lambda$  est égal à  $BS^1 = P_{\infty}(\mathfrak{C})$

Dem : Comme l'ensemble  $\text{Hom}(\Lambda_n, \Lambda_m)$  n'est jamais vide, l'espace  $B\Lambda$  est connexe. Comme  $\text{Hom}(\Lambda_0, \Lambda_0)$  est réduit à 1 élément, tout foncteur de  $\Lambda$  dans la catégorie des ensembles avec pour flèches les bijections est trivial. Ainsi (cf. [11])  $B\Lambda$  est simplement connexe. D'après ([11] p.10) et le corollaire 7, l'anneau de cohomologie  $H^*(B\Lambda, \mathbb{Z})$  est égal à  $\mathbb{Z}[\sigma]$ ,  $\sigma \in H^2(B\Lambda, \mathbb{Z})$ . De même, d'après la remarque 8, l'homologie de  $B\Lambda$  est sans torsion et la dualité canonique fait de  $H^n(B\Lambda, \mathbb{Z})$  le groupe  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n, \mathbb{Z})$ . Il en résulte que si  $f$  est l'application continue de  $B\Lambda$  dans l'espace  $K(\mathbb{Z}, 2)$  égal à  $P_{\infty}(\mathfrak{C})$  qui correspond à  $\sigma \in H^2(B\Lambda, \mathbb{Z})$ , l'application  $f_* : H_n(B\Lambda, \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(P_{\infty}(\mathfrak{C}), \mathbb{Z})$  est un isomorphisme pour toute valeur de  $n$ . Ainsi le théorème de Whitehead (cf. [12]) montre que  $\Pi_n(B\Lambda) = \Pi_n(P_{\infty}(\mathfrak{C}))$  et donc  $B\Lambda$  est un  $K(\mathbb{Z}, 2)$  et est homotope à  $P_{\infty}(\mathfrak{C}) = BS^1$ . ■

Remarquons qu'il n'existe aucun homomorphisme non trivial de  $\Lambda$  dans le groupe  $S$

Soit  $k$  un corps commutatif de caractéristique nulle. Utilisant le Lemme 6 pour obtenir une résolution injective du  $k(\Lambda)$ -module trivial  $k^{\natural}$  on a :

Théorème 11. Pour toute  $k$ -algèbre  $A$  les groupes  $H_{\Lambda}^n(A)$  de cohomologie cyclique de  $A$  sont canoniquement isomorphes aux groupes  $\text{Ext}_{k(\Lambda)}^n(A^{\natural}, k^{\natural})$ .

V Le couple exact reliant  $\text{Ext}_{\Lambda}(Z^{\natural}, E)$  à  $\text{Ext}_{\Delta}(Z^{\natural}, E)$ .

Nous utiliserons la terminologie  $\Delta$ -module pour désigner un groupe abélien cosimplicial. Pour expliciter l'homomorphisme de restriction  $I$  de  $\text{Ext}_{\Lambda}^n(Z^{\natural}, E)$  vers  $\text{Ext}_{\Delta}^n(Z^{\natural}, E)$  qui correspond à l'inclusion  $\Delta \subset \Lambda$  construisons un morphisme de la résolution projective naturelle  $(P^k, b)$  du  $\Delta$ -module trivial vers la restriction à  $\Delta$  du bicomplexe  $(C^{n,m}, d_i)$ . Par construction  $P_n^k$  est le groupe abélien libre de base  $(f_{\alpha})$ ,  $\alpha$  application croissante de  $\{0, \dots, k\}$  dans  $\{0, \dots, n\}$  et  $\Delta$  agit à gauche sur  $P^k : \alpha f_{\beta} = f_{\alpha\beta}$ . Le complexe  $(P^k, b)$  est obtenu à partir du  $\Delta$ -module simplicial  $P$ . Il est clair que l'égalité  $I(f_{\alpha}) = e_{\alpha} \in C^{0,k}$ , définit un morphisme du complexe  $(P^k, b)$  vers le bicomplexe  $(C^{n,m}, d_i)$  restreint à  $\Delta$ , et induit l'identité en homologie.

Construction de  $B$  :  $\text{Ext}_{\Delta}^n(Z^{\natural}, E) \rightarrow \text{Ext}_{\Lambda}^{n-1}(Z^{\natural}, E)$

Le Lemme 6 montre que  $\text{Ext}_{\Lambda}^n(Z^{\natural}, E)$  est le  $n$  ième groupe de cohomologie du bicomplexe  $\text{Hom}_{\Lambda}(C^{n,m}, E), d_i^t$ . L'égalité  $b's + sb' = id$  montre que la  $d_2^t$  cohomologie de ce bicomplexe vaut  $H_{\text{II}}^{n,m} = 0$  pour  $n$  impair. De plus, l'égalité  $\text{Hom}_{\Delta}(P^k, E) = \text{Hom}_{\Lambda}(C^k, E) = E_k$  montre que pour  $n$  pair on a :

$$H_{\text{II}}^{n,m} = \text{Ext}_{\Delta}^m(Z^{\natural}, E).$$

Ainsi la restriction à  $H_{\text{II}}$  du bord  $d_1^t$  est nulle et  $H_I H_{\text{II}} = H_{\text{II}}$ . Le calcul de la différentielle, de degré  $(2, -1)$ , du terme  $E_2$  de la suite spectrale associée à la première filtration donne naissance à un opérateur

$$B : \text{Ext}_{\Delta}^n(Z^{\natural}, E) \rightarrow \text{Ext}_{\Lambda}^{n-1}(Z^{\natural}, E)$$

A tout cocycle  $\varphi \in \text{Hom}_{\Delta}(P^m, E) = E_m = \text{Hom}_{\Lambda}(C^m, E)$ , l'opérateur  $B$  associe le cocycle  $(\psi_{i,j})$  du bicomplexe  $X^{n,m} = \text{Hom}(C^{n,m}, E) = E^m$ , tel que :

$$\psi_{(i,j)} = 0 \text{ pour } (i,j) \neq (0,n-1) \text{ et } \psi_{(0,n-1)} = A^t s^t D^t \varphi.$$

Le théorème 37 que nous avions obtenu dans [6] se reformule alors ainsi :

Théorème 12. Pour tout  $\Lambda$ -module  $E$  on a un couple exact :

$$\begin{array}{ccc} & \text{Ext}_{\Delta}^*(Z^{\natural}, E) & \\ B \swarrow & & \searrow I \\ \text{Ext}_{\Lambda}^*(Z^{\natural}, E) & \xrightarrow{S} & \text{Ext}_{\Lambda}^*(Z^{\natural}, E) \end{array}$$

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [1] M.F. ATIYAH, "Global theory of elliptic operators". Proc. Inter. Conf. on Funct. Analysis, University of Tokyo Press, Tokyo 1970.
  - [2] L. BROWN, R. DOUGLAS, P. FILLMORE, "Extension of  $C^*$ -algebras and K-homology", Annals of Math. (2) 105 (1977), p. 265-324.
  - [3] H. CARTAN et S. EILENBERG, "Homological algebra", Princeton University Press, (1956).
  - [4] P. CARTIER, "Structures simpliciales", Séminaire Bourbaki, 12<sup>ème</sup> Année, n°199, (1959/60).
  - [5] A. CONNES, "Non commutative differential geometry", Part I, "The Chern character in K-homology", Preprint IHES (1982).
  - [6] A. CONNES, "Non commutative differential geometry", Part II, "De Rham homology and non commutative algebra", Preprint IHES (1983).
  - [7] A. GROTHENDIECK, "Théorie de la descente", Séminaire Bourbaki, n°195, (1959/60).
  - [8] Г.Г. KASPAROV, "K-functor and extensions of  $C^*$ -algebras", Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Mat. n°44, (1980), p. 571-636.
  - [9] J.L. LODAY et D. QUILLEN, "Homologie cyclique et homologie de l'algèbre de Lie des matrices", Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Janvier 1983.
  - [10] S. MAC LANE, "Homology", Springer-Verlag Berlin, Gottingen-Heidelberg, (1963).
  - [11] D. QUILLEN, "Higher algebraic K-theory I". Lecture Notes in Math., Vol. 341.
  - [12] E. SPANIER, "Algebraic topology", Mc Graw Hill.
-