

SUR L'APPROXIMATION DE ZONOÏDES PAR DES ZONOTÔPES

NOTE DE J. BOURGAIN^{*)}, J. LINDENSTRAUSS^{**)} ET V.D. MILMAN^{***)}

Institut des Hautes Etudes Scientifiques
35 route de Chartres
91440 Bures-sur-Yvette (France)

Octobre 1986

IHES/M/86/52

^{*)} IHES et University of Illinois

^{**) Université de Jérusalem.}

^{***) Université de Tel-Aviv.}

SUR L'APPROXIMATION DE ZONOÏDES PAR DES ZONOTOPES

NOTE DE J. BOURGAIN^{*)}, J. LINDENSTRAUSS^{**)} ET V.D. MILMAN^{***})

RESUME. Un zonoïde uniformément convexe dans \mathbb{R}^n permet une approximation à $\epsilon(\frac{n}{N})$ près par une somme de N segments. Ce résultat est équivalent à un théorème de plongement dans L_N^1 de sous-espaces n -dimensionnels d'un espace $L^1(\mu)$ possédant un type non-triviale. La démonstration utilise des méthodes probabilistes et de géométrie des espaces de Banach.

SUMMARY. A uniformly convex zonoid in \mathbb{R}^n can be approximated up to $\epsilon(\frac{n}{N})$ by a sum of N line segments. This fact has an equivalent statement in terms of embeddings of n -dimensional subspaces of $L^1(\mu)$ with non-trivial type into L_N^1 . The proof combines probabilistic methods with geometry of Banach spaces.

Un zonotope dans \mathbb{R}^n est une somme finie de segments $K = I_1 + I_2 + \dots + I_N$, et un zonoïde est une limite (pour la métrique de Hausdorff) de zonotopes. Il est claire qu'un zonoïde a un centre de symétrie et on supposera qu'il coïncide avec l'origine. Le lecteur trouvera un aperçu de la théorie des zonotopes et zonoïdes dans l'article expositoire [S-W]. Rappelons en particulier le lien avec les sous-espaces d'espaces $L^1(\mu)$. Si $K = I_1 + \dots + I_N$ est un zonotope n -dimensionnel centré à l'origine, on a $K = \{x \in \mathbb{R}^n ; \|x\|_* \leq 1\}$ où $\|\cdot\|_*$ est la norme duale à

$$\|x\| = \sum_{j=1}^N \alpha_j |\langle u_j, x \rangle|$$

et $\alpha_j = |I_j|$, u_j = vecteur unité en direction I_j . On notera que \mathbb{R}^n , $\|\cdot\|$ est un sous-espace de L_N^1 . De même, la norme duale d'un zonoïde dans \mathbb{R}^n est de la forme $\|x\| = \int |\langle u, x \rangle| \mu(dx)$, où μ est une mesure positive sur la sphère S^{n-1} . Le problème d'approximation d'un zonoïde par la somme d'un nombre réduit de segments équivaut donc à l'existence de plongements $(1+\varepsilon)$ -isométriques de sous-espaces n -dimensionnels d'un espace $L^1(\mu)$ dans L_N^1 pour une valeur optimale de N . Soit $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$ et $B_n^p = \{x \in \mathbb{R}^n ; \|x\|_p \leq 1\}$. Alors B_n^p est un zonoïde pour $2 \leq p \leq \infty$. L'approximation de la boule euclidienne B_n^2 est étudiée dans [B-M]. En fait, en dimension $n > 5$ leurs résultats peuvent être améliorés en exploitant la théorie des sections euclidiennes (voir [K] et [FLM]).

L'approximation de B_n^p ($2 < p < \infty$), plus précisément la dépendance linéaire $N = N(n, \varepsilon)$ en n , fût étudiée dans l'article [J-S]. C'est un cas particulier de notre théorème que nous énonçons maintenant.

THEOREME. Soit X un sous-espace n -dimensionnel d'un espace $L^1(\mu)$ de type $p > 1$ et constante de type $T_p(x)$. Alors X permet un plongement $(1+\varepsilon)$ -isométrique dans l'espace L_N^1 , où

$$N \leq f\left(\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{p-1}, \log T_p(X)\right) \cdot n$$

$f(x, y, z)$ étant polynomiale en x, y, z .

Il nous reste à déterminer une expression explicite satisfaisante pour

la fonction f et en particulier le rôle (géométrique) de ε . Le théorème est démontré par un procédé d'itération où on réduit successivement la valeur de N .

LEMME 1. Soit X un sous-espace n -dimensionnel de l'espace L_N^1 et supposons X de type $p > 1$ et constante de type $T_p(X)$. Dans ce cas X a un plongement $(1+\varepsilon)$ -isométrique dans l'espace L_N^1 , où

$$N' \leq g\left(\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{p-1}, \log T_p(x)\right) N^{1-p} n^p$$

où $p > 0$ est une constante et g une fonction polynomiale.

Notre approche trouve son origine dans un travail récent de G. Schechtman [S]. Il s'agit d'étudier l'approche "empirique" $f \rightarrow f(t_1), \dots, f(t_{N'})$ où une fonction f est évaluée dans un N' -tuple aléatoire de points et d'estimer la déviation $\int |f(t)| dt - \frac{1}{N'} \sum_{j=1}^{N'} |f(t_j)|$. On combine pour cela des estimations probabilistes élémentaires, des méthodes d'entropie (ellipsoïde de F. John, minoration de Sudakov) et des principes de factorizations (théorie de Nikishin-Maurey, [M]). La structure linéaire y joue un rôle important.

REFERENCES

- [S-W] R. Schneider, W. Weil : Zonoids and Related Topics, dans Convexity and its Applications, Birkhäuser Verlag 1984.
- [B-M] U. Betke, P. McMullen : Estimating the sizes of convex bodies from projections,
- [K] B.S. Kashin : Diameters of some finite dimensional sets and of some classes of smooth functions, Izv. AN SSSR, Sér. Mat., 41, 1977, 334-351.
- [FLM] T. Figiel, J. Lindenstrauss, V.D. Milman : The dimension of almost spherical sections of convex bodies, Acta Math., Vol. 39, 1977, 53-94.
- [J-S] W.B. Johnson, G. Schechtman : Embedding ℓ_p^m into ℓ_1^n , Acta Math., Vol. 149, 1982, 71-85.
- [S] G. Schechtman : Preprint, à paraître dans Compositio Math.
- [M] B. Maurey : Théorèmes de factorisation pour les opérateurs linéaires à valeurs dans les espaces L^p , Astérisque 11 Soc. Math. France, 1974.
- [R] H.P. Rosenthal : On subspaces of L^1 , Ann. Math. 97, 1973, 344-373.

*) J. BOURGAIN : IHES et University of Illinois

**) J. LINDENSTRAUSS : Université de Jérusalem

***) V.D. MILMAN : Université de Tel-Aviv