

## SUR L'APPROXIMATION DE ZONOÏDES PAR DES ZONOTÔPES

NOTE DE J. BOURGAIN<sup>\*)</sup>, J. LINDENSTRAUSS<sup>\*\*)</sup> ET V.D. MILMAN<sup>\*\*\*)</sup>

Institut des Hautes Etudes Scientifiques  
35 route de Chartres  
91440 Bures-sur-Yvette (France)

Octobre 1986

IHES/M/86/52

---

<sup>\*)</sup> IHES et University of Illinois

<sup>\*\*)</sup> Université de Jérusalem.

<sup>\*\*\*)</sup> Université de Tel-Aviv.

## SUR L'APPROXIMATION DE ZONOÏDES PAR DES ZONOTOPES

NOTE DE J. BOURGAIN<sup>\*)</sup>, J. LINDENSTRAUSS<sup>\*\*)</sup> ET V.D. MILMAN<sup>\*\*\*)</sup>

RESUME. Un zonoïde uniformément convexe dans  $\mathbb{R}^n$  permet une approximation à  $c(\frac{n}{N})$  près par une somme de  $N$  segments. Ce résultat est équivalent à un théorème de plongement dans  $L_N^1$  de sous-espaces  $n$ -dimensionnels d'un espace  $L^1(\mu)$  possédant un type non-triviale. La démonstration utilise des méthodes probabilistes et de géométrie des espaces de Banach.

SUMMARY. A uniformly convex zonoid in  $\mathbb{R}^n$  can be approximated up to  $c(\frac{n}{N})$  by a sum of  $N$  line segments. This fact has an equivalent statement in terms of embeddings of  $n$ -dimensional subspaces of  $L^1(\mu)$  with non-trivial type into  $L_N^1$ . The proof combines probabilistic methods with geometry of Banach spaces.

Un zonotôpe dans  $\mathbb{R}^n$  est une somme finie de segments  $K = I_1 + I_2 + \dots + I_N$ , et un zonoïde est une limite (pour la métrique de Hausdorff) de zonotôpes. Il est clair qu'un zonoïde a un centre de symétrie et on supposera qu'il coïncide avec l'origine. Le lecteur trouvera un aperçu de la théorie des zonotôpes et zonoïdes dans l'article expositif [S-W]. Rappelons en particulier le lien avec les sous-espaces d'espaces  $L^1(\mu)$ . Si  $K = I_1 + \dots + I_N$  est un zonotôpe  $n$ -dimensionnel centré à l'origine, on a  $K = \{x \in \mathbb{R}^n ; \|x\|_* \leq 1\}$  où  $\|\cdot\|_*$  est la norme duale à

$$\|x\| = \sum_{j=1}^N \alpha_j |\langle u_j, x \rangle|$$

et  $\alpha_j = |I_j|$ ,  $u_j$  = vecteur unité en direction  $I_j$ . On notera que  $\mathbb{R}^n$ ,  $\|\cdot\|$  est un sous-espace de  $L_N^1$ . De même, la norme duale d'un zonotope dans  $\mathbb{R}^n$  est de la forme  $\|x\| = \int |\langle u, x \rangle| \mu(dx)$ , où  $\mu$  est une mesure positive sur la sphère  $S^{n-1}$ . Le problème d'approximation d'un zonotope par la somme d'un nombre réduit de segments équivaut donc à l'existence de plongements  $(1+\epsilon)$ -isométriques de sous-espaces  $n$ -dimensionnels d'un espace  $L^1(\mu)$  dans  $\ell_N^1$  pour une valeur optimale de  $N$ . Soit  $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$  et  $B_n^p = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\|_p \leq 1\}$ . Alors  $B_n^p$  est un zonotope pour  $2 \leq p \leq \infty$ . L'approximation de la boule euclidienne  $B_n^2$  est étudiée dans [B-M]. En fait, en dimension  $n > 5$  leurs résultats peuvent être améliorés en exploitant la théorie des sections euclidiennes (voir [K] et [FLM]).

L'approximation de  $B_n^p$  ( $2 < p < \infty$ ), plus précisément la dépendance linéaire  $N = N(n, \epsilon)$  en  $n$ , fût étudiée dans l'article [J-S]. C'est un cas particulier de notre théorème que nous énonçons maintenant.

THEOREME. Soit  $X$  un sous-espace  $n$ -dimensionnel d'un espace  $L^1(\mu)$  de type  $p > 1$  et constante de type  $T_p(X)$ . Alors  $X$  permet un plongement  $(1+\mu)$ -isométrique dans l'espace  $\ell_N^1$ , où

$$N \leq f\left(\frac{1}{\epsilon}, \frac{1}{p-1}, \log T_p(X)\right) \cdot n$$

$f(x, y, z)$  étant polynomiale en  $x, y, z$ .

Il nous reste à déterminer une expression explicite satisfaisante pour

la fonction  $f$  et en particulier le rôle (géométrique) de  $\epsilon$ . Le théorème est démontré par un procédé d'itération où on réduit successivement la valeur de  $N$ .

LEMME 1. Soit  $X$  un sous-espace  $n$ -dimensionnel de l'espace  $L_N^1$  et supposons  $X$  de type  $p > 1$  et constante de type  $T_p(X)$ . Dans ce cas  $X$  a un plongement  $(1+\epsilon)$ -isométrique dans l'espace  $L_{N'}^1$  où

$$N' \leq g\left(\frac{1}{\epsilon}, \frac{1}{p-1}, \log T_p(x)\right) N^{1-\rho} n^\rho$$

où  $\rho > 0$  est une constante et  $g$  une fonction polynomiale.

Notre approche trouve son origine dans un travail récent de G. Schechtman [S]. Il s'agit d'étudier l'approche "empirique"  $f \rightarrow f(t_1), \dots, f(t_{N'})$  où une fonction  $f$  est évaluée dans un  $N'$ -tuple aléatoire de points et d'estimer la déviation  $\int |f(t)| dt - \frac{1}{N'} \sum_{j=1}^{N'} |f(t_j)|$ . On combine pour cela des estimations probabilistes élémentaires, des méthodes d'entropie (ellipsoïde de F. John, minoration de Sudakov) et des principes de factorizations (théorie de Nikishin-Maurey, [M]). La structure linéaire  $y$  joue un rôle important.

# REFERENCES

- [S-W] R. Schneider, W. Weil : Zonoïds and Related Topics, dans Convexity and its Applications, Birkhäuser Verlag 1984.
- [B-M] U. Betke, P. McMullen : Estimating the sizes of convex bodies from projections,
- [K] B.S. Kashin : Diameters of some finite dimensional sets and of some classes of smooth functions, Izv. AN SSSR, Sér. Mat., 41, 1977, 334-351.
- [FLM] T. Figiel, J. Lindenstrauss, V.D. Milman : The dimension of almost spherical sections of convex bodies, Acta Math, Vol. 39, 1977, 53-94.
- [J-S] W.B. Johnson, G. Schechtman : Embedding  $\ell_p^m$  into  $\ell_1^n$ , Acta Math., Vol. 149, 1982, 71-85.
- [S] G. Schechtman : Preprint, à paraître dans Compositio Math.
- [M] B. Maurey : Théorèmes de factorization pour les opérateurs linéaires à valeurs dans les espaces  $L^p$ , Astérisque 11 Soc. Math. France, 1974.
- [R] H.P. Rosenthal : On subspaces of  $L^1$ , Ann. Math. 97, 1973, 344-373.

\*) J. BOURGAIN : IHES et University of Illinois

\*\*) J. LINDENSTRAUSS : Université de Jérusalem

\*\*\*) V.D. MILMAN : Université de Tel-Aviv