SUR L'APPROXIMATION DE ZONOÏDES PAR DES ZONOTÔPES

NOTE DE J. BOURGAIN*), J. LINDENSTRAUSS**) ET V.D. MILMAN***)

Institut des Hautes Etudes Scientifiques
35 route de Chartres
91440 Bures-sur-Yvette (France)

Octobre 1986

IHES/M/86/52

*) IHES et University of Illinois

**) Université de Jérusalem.

***) Université de Tel-Aviv.

SUR L'APPROXIMATION DE ZONOIDES PAR DES ZONOTOPES

NOTE DE J. BOURGAIN*), J. LINDENSTRAUSS**) ET V.D. MILMAN***)

RESUME. Un zonoïde uniformément connexe dans $\mathbb{R}^n$ permet une approximation à $\varepsilon(\frac{n}{N})$ près par une somme de N segments. Ce résultat est équivalent à un théorème de plongement dans L_N^1 de sous-espaces n-dimensionnels d'un espace $L^1(\mu)$ possédant un type non-triviale. La démonstration utilise des méthodes probabilistes et de géométrie des espaces de Banach.

SUMMARY. A uniformly convex zonoid in $\mathbb{R}^n$ can be approximated up to $\varepsilon(\frac{n}{N})$ by a sum of N line segments. This fact has an equivalent statement in terms of embeddings of n-dimensional subspaces of $L^1(\mu)$ with non-trivial type into L_N^1. The proof combines probabilistic methods with geometry of Banach spaces.

Un zonotôpe dans $\mathbb{R}^n$ est une somme finie de segments $K = I_1+I_2+\ldots+I_N$, et un zonoïde est une limite (pour la métrique de Hausdorff) de zonotôpes. Il est claire qu'un zonoïde a un centre de symétrie et on supposera qu'il coïncide avec l'origine. Le lecteur trouvera un aperçu de la théorie des zonotôpes et zonoïdes dans l'article expositoire [S-W] . Rappelons en particulier le lien avec les sous-espaces d'espaces $L^1(\mu)$. Si $K = I_1+\ldots+I_N$ est un zonotôpe n-dimensionnel centré à l'origine, on a $K = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \|x\|_* \leq 1\}$ où $\| \ \|_*$ est la norme duale à

$$\|x\| = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \, |\langle u_j , x \rangle|$$

et $\alpha_j = |I_j|$, u_j = vecteur unité en direction I_j . On notera que $\mathbb{R}^n$, $\| \ \|$ est un sous-espace de L_N^1 . De même, la norme duale d'un zonoïde dans $\mathbb{R}^n$ est de la forme $\|x\| = \int |\langle u,x \rangle| \, \mu(dx)$, où μ est une mesure positive sur la sphère S^{n-1} . le problème d'approximation d'un zonoïde par la somme d'un nombre réduit de segments équivaut donc à l'existence de plongements $(1+\varepsilon)$-isométriques de sous-espaces n-dimensionnels d'un espace $L^1(\mu)$ dans ℓ_N^1 pour une valeur optimale de N . Soit $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{1/p}$ et $B_n^p = \{x \in \mathbb{R}^n ; \|x\|_p \leq 1\}$. Alors B_n^p est un zonoïde pour $2 \leq p \leq \infty$. L'approximation de la boule euclidienne B_n^2 est étudiée dans [B-M] . En fait, en dimension $n > 5$ leurs résultats peuvent être améliorés en exploitant la théorie des sections euclidiennes (voir [K] et [FLM]) .

L'approximation de B_n^p $(2 < p < \infty)$, plus précisément la dépendance linéaire $N = N(n,\varepsilon)$ en n , fût étudiée dans l'article [J-S] . C'est un cas particulier de notre théorème que nous énonçons maintenant.

<u>THEOREME</u>. Soit X un sous-espace n-dimensionnel d'un espace $L^1(\mu)$ de type $p > 1$ et constante de type $T_p(x)$. Alors X permet un plongement $(1+\mu)$-isométrique dans l'espace ℓ_N^1 , où

$$N \leq f\left(\frac{1}{\varepsilon} , \frac{1}{p-1} , \log T_p(X)\right).n$$

$f(x,y,z)$ étant polynomiale en x,y,z .

Il nous reste à déterminer une expression explicite satisfaisante pour la fonction f et en particulier le rôle (géométrique) de ε. Le théorème est démontré par un procédé d'itération où on réduit successivement la valeur de N.

<u>LEMME 1</u>. Soit X un sous-espace n-dimensionnel de l'espace L^1_N et supposons X de type $p > 1$ et constante de type $T_p(X)$. Dans ce cas X a un plongement $(1+\varepsilon)$-isométrique dans l'espace $L^1_{N'}$, où

$$N' \leq g(\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{p-1}, \log T_p(x))\, N^{1-\rho} n^{\rho}$$

où $\rho > 0$ est une constante et g une fonction polynomiale.

Notre approche trouve son origine dans un travail récent de G. Schechtman [S]. Il s'agit d'étudier l'approche "empirique" $f \to f(t_1),\dots,f(t_{N'})$ où une fonction f est évaluée dans un N'-tuple aléatoire de points et d'estimer la déviation $\int |f(t)\, dt - \frac{1}{N'} \sum_{j=1}^{N'} |f(t_j)|$. On combine pour cela des estimations probabilistes élémentaires, des méthodes d'entropie (ellipsoïde de F. John, minoration de Sudakov) et des principes de factorizations (théorie de Nikishin-Maurey, [M]). La structure linéaire y joue un rôle important.

REFERENCES

[S-W] R. Schneider, W. Weil : Zonoïds and Related Topics, dans Convexity and its Applications, Birkhäuser Verlag 1984.

[B-M] U. Betke, P. McMullen : Estimating the sizes of convex bodies from projections,

[K] B.S. Kashin : Diameters of some finite dimensional sets and of some classes of smooth functions, Izv. AN SSSR, Sér. Mat., 41, 1977, 334-351.

[FLM] T. Figiel, J. Lindenstrauss, V.D. Milman : The dimension of almost spherical sections of convex bodies, Acta Math, Vol. 39, 1977, 53-94.

[J-S] W.B. Johnson, G. Schechtman : Embedding ℓ_p^m into ℓ_1^n , Acta Math., Vol. 149, 1982, 71-85.

[S] G. Schechtman : Preprint, à paraître dans Compositio Math.

[M] B. Maurey : Théorèmes de factorization pour les opérateurs linéaires à valeurs dans les espaces L^p , Astérisque 11 Soc. Math. France, 1974.

[R] H.P. Rosenthal : On subspaces of L^1 , Ann. Math. 97, 1973, 344-373.

*) J. BOURGAIN : IHES et University of Illinois

**) J. LINDENSTRAUSS : Université de Jérusalem

***) V.D. MILMAN : Université de Tel-Aviv