3iLL3

NOTES DE L. ILLUSIE

EXPOSE III (29 janvier 1980)

1. <u>Comparaison de divers types de fonctions</u> L .

Pour éclairer la conjecture (II 2.3), comparons entre eux les divers types de fonctions L (et d'équations fonctionnelles) auxquels on peut s'intéresser. On conserve les notations de (II 1.2).

1.1. <u>Fonctions</u> L <u>de Hecke</u> [2] . On part d'un caractère (continu) $\chi : W(\overline{K}/K) \longrightarrow \mathbb{C}^*$, d'où, comme dans (loc. cit.), une fonction L . Noter que, par le corps de classes global, χ correspond à un caractère (à valeurs dans $\mathbb{C}^*$) de $\underline{A}^*/K^*$: c'est l'exemple le plus simple d'une forme automorphe. D'après (loc. cit.), L vérifie une équation fonctionnelle du type

(1.1.1) $$L(\chi^{-1},(qT)^{-1}) = aT^n L(\chi,T) \qquad (T = q^{-s}) \ ,$$

et Tate donne une formule pour la constante a :

(1.1.2) $$a = \prod_v \varepsilon_v(\chi_v,\psi_v,dx_v) \quad ,$$

où les constantes locales ε_v sont caractérisées par des équations du type (II 2.1.3.1).

1.2. <u>Fonctions</u> L <u>d'Artin</u>. On part d'une représentation continue

$$\pi : W(\overline{K}/K) \longrightarrow GL(n,\mathbb{C}) \quad ,$$

dont on suppose même qu'elle se factorise à travers un quotient fini G de $W(\overline{K}/K)$ (c'est anodin, car la restriction de π au groupe de Weil géométrique (qui est profini) se factorise à travers un quotient fini). On en déduit une fonction L d'Artin $L(\pi)$. Pour étudier cette fonction, on dispose de deux méthodes.

a) <u>La théorie de Brauer</u> : elle permet d'écrire π comme somme de représentations induites de représentations χ de degré un de sous-groupes de G :

$$\pi = \sum \pm \mathrm{Ind}_H^G(\chi) \quad ,$$

d'où une décomposition de L ,

(*) $$L(\pi) = \prod L(\chi)^{\pm 1} \quad ,$$

que l'on peut utiliser pour généraliser le cas 1.1 . On obtient notamment une équation fonctionnelle

(1.2.1) $\quad L(\pi^{\vee}(1),T^{-1}) = aT^{n}L(\pi,T)$

(où (1) désigne une torsion à la Tate, permettant d'écrire T^{-1} au lieu de $(qT)^{-1}$ dans le membre de gauche), et une décomposition de la constante a en produit de constantes locales

(1.2.2) $\quad a = \prod_v a_v(\ldots)$.

Cette décomposition dépend malheureusement de l'écriture (*). Toutefois, si, au lieu d'écrire π comme ci-dessus, on écrit

$$\pi = \dim \pi\cdot 1 + \Sigma \pm(\mathrm{Ind}_H^G(\chi) - \mathrm{Ind}_H^G(1))$$

et la décomposition analogue de $L(\pi)$, alors (1.2.2) ne dépend plus de ce choix. Ce point, non évident, est démontré dans [1] .

b) <u>La théorie de Grothendieck</u> : elle fournit une interprétation cohomologique de la fonction L ,

$$L(\pi) = \det(1-FT,H^*)^{-1} ,$$

prouvant ainsi sa rationalité. De cette formule résulte en particulier la <u>conjecture d'Artin</u> pour les corps de fonctions : si π ne contient pas la représentation triviale, alors $L(\pi)$ est un polynôme (en effet, les facteurs relatifs à H^0 et H^2 disparaissent).

1.3. <u>Cas ℓ-adique.</u> Partons d'une représentation continue $\pi : \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \longrightarrow GL(n,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ qui se factorise par $GL(n,E_\lambda)$, pour $E_\lambda \subset \mathbb{Q}_\ell$ une extension finie assez grande de $\mathbb{Q}_\ell$, et presque partout non-ramifiée. Il n'est plus possible de se ramener à un groupe de Galois fini. Supposons pour simplifier que π soit à valeurs dans $GL(n,\mathbb{Z}_\ell)$. Alors π définit, pour chaque entier $k \geqslant 1$, une représentation $\pi \bmod \ell^k$ à valeurs dans $GL(n,\mathbb{Z}/\ell^k)$, qui se factorise à travers un quotient fini G_k de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$, mais G_k peut grandir avec k , et en général π ne se factorise pas à travers un quotient fini. On ne peut donc plus appliquer la méthode de Brauer : il n'y a pas de théorie de Brauer mod ℓ^k , seulement mod ℓ ! La seule méthode qui reste disponible est celle de Grothendieck (qui marche d'ailleurs mod ℓ^k). Elle fournit la rationalité de la fonction L et l'équation fonctionnelle, mais ne dit pas grand'chose sur la constante. Par analogie avec le cas 1.2, on est donc amené à définir des constantes locales ε_v (II 2.1), et à faire la conjecture (II 2.3). La définition des ε_v est d'ailleurs délicate. La représentation du groupe de Weil local $W(\overline{K}_v/K_v)$, même restreinte au groupe d'inertie I_v, ne se factorise pas, elle non plus, à travers un quotient fini (tandis que, dans le cas 1.2, i.e. avec $GL(n,\mathbb{C})$ au lieu de $GL(n,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, l'inertie agit toujours à travers un quotient fini). Une courbe elliptique avec réduction multiplicative fournit un exemple où l'inertie n'agit pas à travers un quotient fini (penser à la transformation de Picard-Lefschetz). Toutefois, après semi-simplification, on peut décomposer π_v en somme de représentations de la forme $V \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell^{(t)}$, où le groupe de Weil agit sur V à travers un quotient fini, et $\overline{\mathbb{Q}}_\ell^{(t)}$ désigne la représentation définie par un élément t de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell^{*}$, cf. (I 1.5).

2. <u>Compléments au formulaire</u> (II 2.1) <u>et cas de validité de</u> (II 2.3).

Soit K_v un corps local comme en (II 0.1). Si $\underline{F}$ est un faisceau ℓ-adique sur $\mathrm{Spec}(O_v)$, $\psi : K_v \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^{*}$ un caractère $\underbrace{\text{additif}}_{\text{non trivial}}$, dx une mesure de Haar sur K_v (la donnée de dx équivalent à celle de $\int_{O_v} dx$), on dispose (II 2.1) d'une "constante locale"

$$(2.1) \qquad \varepsilon(\underline{F},\psi,dx) \in \overline{\mathbb{Q}}_\ell^{*},$$

qui vérifie les formules (II 2.1.1 à 2.1.5). Rappelons d'autre part (II 2.4) la dépendance de ε par rapport à ψ : si ψ est un caractère additif donné (non trivial), tout autre est de la forme $x \longmapsto \psi(ax)$, avec $a \in K_v^{*}$, et l'on a

$$(2.2) \qquad \varepsilon(\underline{F},\psi(ax),dx) = (\det(\underline{F}_{\overline{\eta}}))(a)\ |a|^{-rg(\underline{F}_{\overline{\eta}})}\ \varepsilon(\underline{F},\psi,dx)\ ,$$

où $\det(\underline{F}_{\overline{\eta}})$ est considéré, grâce au corps de classes local, comme un caractère de K_v^{*}, (et $|\ |$ désigne, comme d'habitude, la valeur absolue normalisée).

Voici deux formules supplémentaires importantes.

a) Pour $t \in \overline{\mathbb{Q}}_\ell^{*}$, on a

$$(2.3) \qquad \varepsilon(\underline{F}^{(t)},\psi,dx) = (t^{\deg(v)})^{(a(\underline{F})\ +\ n(\psi)rg(\underline{F}_{\overline{\eta}}))}\ \varepsilon(\underline{F},\psi,dx)\ ,$$

où $\deg(v) = [k(v) : \mathbb{F}_p]$, $a(\underline{F})$ est la chute totale de $\underline{F}$ $= rg(\underline{F}_{\overline{\eta}}) - rg(\underline{F}_{s}) + Sw(\underline{F}_{\overline{\eta}})$ (cf. (I 2.6.1)), et $n(\psi)$ est le <u>conducteur</u> de ψ, défini par

(2.3.1) $n(\psi)$ = le plus petit entier n tel que $\psi \mid \pi^{-n}O_v = 1$,

où π est une uniformisante (Cartier propose la recette suivante pour retenir la définition : se rappeler que $n(\psi)$ vaut 0 si ψ est trivial sur O_v mais pas sur $\pi^{-1}O_v$, et que $n(\psi(ax)) = v(a) + n(\psi)$).

b) Si $\underline{F} = j_*\underline{F}_{\overline{\eta}}$ (i.e. $\underline{F}_s = \underline{F}_{\overline{\eta}}^{I}$, avec pour flèche de spécialisation l'inclusion évidente), alors on a (notant (1) le twist par le caractère $|x|$)

(2.4) $\quad \varepsilon(\underline{F},\psi,dx)\varepsilon(\check{\underline{F}}(1),\psi(-x),dx') = 1$,

où dx' est la mesure duale de dx relativement à ψ , au sens de la formule de Plancherel.

La formule b) découle, par réduction au cas d'un caractère de dimension 1, de l'équation fonctionnelle locale (II (2.1.3.1)) et de la formule d'inversion de Fourier. Elle reflète le fait que la constante $\varepsilon(V,T)$ de l'équation fonctionnelle globale (I 2.2.1) vérifie la formule

(2.4.1) $\quad \varepsilon(V,T)\,\varepsilon(\check{V}(1),T^{-1}) = 1$

(qu'on obtient en appliquant (I 2.2.1) à $\check{V}(1)$).

La formule a) découle aussi, par réduction à la dimension 1, de l'équation fonctionnelle locale, ou plus exactement de son corollaire donnant l'expression "explicite" de $\varepsilon_0(\chi,\psi,dx)$ ([1] 3.4.3.4) (cf. (II 2.2.2)) :

(2.3.2) $\quad \varepsilon_0(\chi,\psi,dx) = \int_{\gamma^{-1}O_v^*}\chi^{-1}(x)\psi(x)dx$,

où γ désigne un élément de K_v^* de valuation $n(\psi) + sw(\chi) + 1$. La propriété globale que traduit (2.3) est assez intéressante : si $\underline{F}$ désigne maintenant un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau sur la courbe X_o , et si l'on fait le produit, sur toutes les places v, des équations (2.3) correspondantes, on obtient, modulo la conjecture (II 2.3), et compte tenu de (I 2.5.3),

(*) $$-\chi(X,\underline{F}) = \sum \deg(v)a_v(\underline{F}) + \deg(v)n(\psi_v)rg(\underline{F}_{\overline{\eta}}) .$$

Or

$$\sum_{v\in|X_o|}\deg(v)a_v(\underline{F}) = \sum_{x\in X(\mathbb{F})} a_x(\underline{F}) ,$$

et il est connu (cf. l'exposé suivant) que

$$(2.3.1.1) \qquad \overline{\sum_{v \in |X|\,|X_o|}} \deg(v)n(\psi_v) = 2g - 2 \quad ,$$

où g est le genre de X_o . On reconnaît donc en (*) la formule de Grothendieck-Ogg-Shafarevitch.

On déduit aisément de (2.3) la généralisation suivante : si $\underline{G}$ est un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau non ramifié sur $\mathrm{Spec}(O_v)$, on a (posant $F_v = F^{\deg(v)}$) :

$$(2.3.3) \quad \varepsilon(\underline{F} \otimes \underline{G},\psi,dx) = \det(\underline{G})(F_v)^{(a(\underline{F}) + \mathrm{rg}(\underline{F}_{\overline{\eta}})n(\psi))}\varepsilon(\underline{F},\psi,dx)^{\mathrm{rg}(\underline{G})} \quad .$$

En particulier, pour $\underline{G}$ virtuel de rang 0 , $\underline{F}$ virtuel tel que $\mathrm{rg}(\underline{F}_{\overline{\eta}}) = 0$ et $a(\underline{F}) = 0$, on a

$$(2.3.4) \quad \varepsilon(\underline{F} \otimes \underline{G},\psi,dx) = 1 \quad .$$

Par conséquent, <u>la validité de la conjecture</u> (II 2.3) <u>entraînerait celle de la conjecture</u> (I 2.6.2) .

On ne connaît pas de généralisation de (2.3.3) au cas où $\underline{F}$ <u>et</u> $\underline{G}$ sont ramifiés. Cartier a toutefois une conjecture pour $\underline{F}$ et $\underline{G}$ de rang 2 , liée à la formule de Barnes.

Pour terminer, rappelons que la conjecture (II 2.3) est démontrée dans le cas où la représentation $\underline{F}_{\overline{\eta}}$ fait partie d'un <u>système compatible infini de représentations</u> ℓ-<u>adiques</u> [1] . Par un tel système on entend la donnée d'un corps de nombres E , d'une famille infinie Λ de places finies de E , ne divisant pas p , et, pour chaque $\lambda \in \Lambda$, d'une représentation presque partout non-ramifiée

$$\pi_\lambda : W(\overline{K}/K) \longrightarrow GL(n,E_\lambda) \quad ,$$

de telle manière que la condition suivante soit vérifiée : quels que soient λ_1 et $\lambda_2 \in \Lambda$, alors pour presque toutes les places v de K , on a

(i) $\det_{\pi_{\lambda_i}}(1-F_v t) \in E[t] \qquad (i = 1,\ 2)$

(ii) $\det_{\pi_{\lambda_1}}(1-F_v t) = \det_{\pi_{\lambda_2}}(1-F_v t)$.

Pour la démonstration, voir [1].

[1] P. Deligne, Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L, Modular functions in one variable II, Lecture Notes in Mathematics n° 349, Springer-Verlag (1973)

[2] J. Tate, Fourier Analysis in Number Fields and Hecke's Zeta-Functions, in Algebraic Number Theory, edited by Cassels-Fröhlich, Academic Press (1967).

EXPOSE IV (5 février 1980)

1. Lien avec les formes automorphes.

Les conjectures (I 2.6.2) et (II 2.3) sont liées au dictionnaire conjectural entre formes automorphes sur GL_n et représentations ℓ-adiques. Ce dictionnaire met en rapport les notions suivantes : a) formes automorphes sur GL_n b) systèmes compatibles infinis de représentations ℓ-adiques b') représentations ℓ-adiques isolées. Soient K un corps de fonctions d'une variable sur un corps fini, $\underline{A}$ l'anneau des adèles de K. Le groupe $GL(n,K)$ se plonge diagonalement comme sous-groupe discret de $GL(n,\underline{A})$ et le groupe $GL(n,\underline{A})$ agit par translations à droite sur l'espace des fonctions sur l'espace homogène $GL(n,K)\backslash GL(n,\underline{A})$. On peut considérer les sous-représentations admissibles irréductibles de cet espace. En fait, on s'intéresse seulement à la partie "cuspidale" du spectre : pour chaque quasi-caractère ω de $\underline{A}^*$, trivial sur K^*, soit $L_o(GL(n,K)\backslash(GL(n,\underline{A}),\omega)$ l'espace des fonctions f sur $GL(n,\underline{A})$, invariantes à gauche sous $GL(n,K)$, invariantes à droite par un sous-groupe ouvert suffisamment petit de $GL(n,\underline{A})$, prenant le caractère ω sous l'action du centre $GL(1,\underline{A})\subset GL(n,\underline{A})$ de $GL(n,A)$: $f(gz) = \omega(z)\, f(g)$ pour $z \in GL(1,\underline{A})$, et cuspidale : pour N le radical unipotent d'un sous-groupe parabolique de GL_n, on exige la nullité de l'intégrale

$$\int_{N(K)\backslash N(\underline{A})} f(ng)\, dn \ .$$

Cette intégrale se réduit à une somme finie, de sorte que la définition de L_o est purement algébrique : on peut se placer sur un corps de base algébriquement de caractéristique 0 quelconque. Les analystes aiment utiliser $\mathbb{C}$; ici $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ est plus commode. On sait que pour chaque sous-groupe ouvert K de $GL(n,\underline{A})$ l'espace des invariants de K dans L_o est de dimension finie, et que L_o lui-même est somme directe dénombrable de sous-représentations admissibles irréductibles de $GL(n,\underline{A})$. Lorsque ω parcourt les quasi-caractères de $\underline{A}^*/K^*$, ces représentations sont les représentations automorphes cuspidales de $GL(n,A)$. Celles de caractère central ω donné forment un ensemble discret, et si ω (à valeurs dans le corps de coefficients, $\mathbb{C}$ ou $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$) est à valeurs algébriques, elles se réalisent chacune déjà sur un corps de nombres ($\subset \mathbb{C}$, ou $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$). Le caractère central, par contre est susceptible de variations continues : si on tord une représentation automorphe cuspidale par le quasi-caractère $\omega_t : g \longmapsto t^{\log_p(\|\det g\|)}$, elle reste automorphe cuspidale ; son caractère central est multiplié par ω_t^n.

A côté de la notion de représentation automorphe, on a celle de <u>système compatible infini de représentations</u> <u>ℓ-adiques</u> de $W(\overline{K}/K)$, dont on a rappelé la définition à la fin de l'exposé précédent. Enfin, au lieu d'un tel système, on peut choisir une extension finie E_λ de Q_ℓ et considérer une seule représentation de $W(\overline{K}/K)$ à valeurs dans $GL(n,E_\lambda)$. On espère que ces trois notions sont reliées par un dictionnaire.

Tout d'abord, pour $n = 2$, on sait, grâce à Drinfeld, à une représentation automorphe cuspidale, dont le caractère central est à valeurs algébriques, associer un système compatible infini de représentations ℓ-adiques irréductibles, et l'on a une définition conjecturale pour $n \geqq 3$. D'autre part, d'un système on peut extraire une représentation λ-adique. Maintenant, partant d'une représentation λ-adique, on peut se demander s'il est possible de lui associer une forme automorphe dont elle dérive par le procédé précédent. Il s'agit de la réciproque de la théorie de Hecke. Tout d'abord, à une telle représentation $\underline{F}$ on peut associer, comme dans les exposés précédents, une fonction L (correspondant à $J_x\underline{F}$)

$$L(\underline{F},t) = \prod_v \det(1-F_v t^{\deg(v)},\underline{F}_v)^{-1} .$$

En fait, plus qu'à la fonction L elle-même, c'est à la famille de ses facteurs locaux qu'on s'intéresse. Presque tous sont des polynômes de degré n en $t^{\deg(v)}$. Soit π une représentation automorphe cuspidale pour $GL(m)$. Alors, à l'aide des facteurs locaux de $L(\underline{F})$ et de ceux associés à π, on fabrique une fonction L "mixte" de la manière suivante. Posons, pour $v \in |X|$,

$$L_v(\underline{F}) = \det(1-F_v t^{\deg(v)},\underline{F}_v) = \prod (1-\alpha_i t^{\deg(v)})^{-1} ,$$

notons d'autre part

$$L_v(\pi) = \prod (1-\beta_i t^{\deg(v)})^{-1}$$

le facteur local associé à π. Si v est une "bonne" place (i.e. telle que $\underline{F}$

et π n'y soient pas ramifiés, ce qui, pour π signifie que le facteur local est de degré m), on définit

$$L_v(\underline{F}, \pi_{n-1}) = \prod_{i,j} (1-\alpha_i\beta_j t^{\deg(v)})^{-1} \quad .$$

Lorsque les ramifications de $\underline{F}$ et π sont disjointes, on étend la définition aux mauvaises places en prenant la même formule. Enfin, on pose

$$L(\underline{F},\pi_{n-1},t) = \prod_v L_v(\underline{F},\pi_{n-1}) \quad .$$

On désire que cette fonction L vérifie une équation fonctionnelle. Plus précisément, supposons $\underline{F}$ irréductible, et que, pour tout $m < n$, et toute représentation forme automorphe cuspidale π sur $GL(m)$, de ramification disjointe de celle de $\underline{F}$, la fonction $L(\underline{F},\pi)$ soit un polynôme et vérifie une équation fonctionelle de la forme

$$L(\underline{F}^\vee(1),\pi_i,t^{-1}) = \varepsilon(\underline{F},\pi_i)L(\underline{F},\pi_i,t) \quad ,$$

avec une constante $\varepsilon(\underline{F},\pi_i)$ ayant des propriétés analogues à celles des constantes ε envisagées précédemment (en particulier, admettant une écriture $\varepsilon(\underline{F},\pi) = \varepsilon(\underline{F})^m \varepsilon(\pi)^{\dim(\underline{F})}(\ldots)$ du type suggéré par (I 2.6.2.)), alors les spécialistes sauraient qu'il existe une représentation automorphe cuspidale π_n sur $GL(n)$ qui corresponde à $\underline{F}$, en particulier qui ait comme facteurs locaux L_v ceux de $\underline{F}$. Notons que, si l'on disposait de la construction de Drinfeld pour tout $m < n$, on pourrait remplacer $L(\underline{F},\pi)$ par $L(\underline{F} \otimes \underline{F}(\pi))$, où $\underline{F}(\pi)$ serait le faisceau correspondant à π , et les propriétés à vérifier pour cette fonction L seraient simplement la conjecture (I 2.6.2). On aperçoit ainsi un principe de récurrence pour établir le dictionnaire désiré : disposant du dictionnaire pour $i < n$ et de la conjecture (I 2.6.2), on en déduit le dictionnaire pour $i = n$. En particulier, si l'on disposait de la conjecture (I 2.6.2), on pourrait, grâce à Drinfeld, obtenir le dictionnaire pour $n = 3$. Si l'on disposait de la conjecture (I 2.6.2) et de la construction de Drinfeld pour tout n, le dictionnaire serait établi pour tout n, ce qui entraînerait notamment que toute représentation E_λ-adiques absolument irréductible à déterminant algébrique ferait partie d'un système compatible infini de représentations ℓ-adiques, et en particulier que les polynômes $\det(1-F_v t)$ pour presque tout v seraient à coefficients dans un corps de nombres indépendants de ℓ .

3.443

2. Traduction géométrique de la conjecture (II 2.3).

On conserve les notations de (II 2.3). Rappelons que la constante $\varepsilon(\underline{F})$ à laquelle on s'intéresse est donnée par

(2.0) $\quad \varepsilon(\underline{F}) = \det(-F, H^*(X,\underline{F}))^{-1} \quad .$

L'objet $\det H^*(X,\underline{F})$ ne dépend que de la donnée géométrique $X/\mathbb{F}$. Si on pouvait le "calculer à isomorphisme unique près", on saurait exprimer comment F y opère, et l'on "comprendrait" par conséquent la constante ε , qui, elle, est de nature arithmétique. Cela suggère d'essayer de traduire géométriquement (II 2.3). Commençons par ré-interpréter les termes locaux $\varepsilon_v(\underline{F},\psi_v,dx_v)$.

2.1. Normalisation des dx_v .

La mesure de Haar dx choisie donne la masse 1 à $\underline{A}/K$. Il s'ensuit que, dans la décomposition $dx = \prod dx_v$, il n'est en général pas possible que l'on ait, pour tout v, $\int_{O_v} dx_v = 1$, ce qui serait pourtant agréable. Notons $(dx_v)_o$ la mesure de Haar sur K_v telle que $\int_{O_v} (dx_v)_o = 1$, et posons $(dx)_o = \prod (dx_v)_o$.

Calculons $\int_{A/K} (dx)_o$. Par construction, la masse de $\prod O_v$ dans $\underline{A}$ pour $(dx)_o$ est 1 . Si I désigne l'image de $\prod O_v$ dans $\underline{A}/K$, on a donc

$$\int_{A/K} (dx)_o) = \left(\int_I (dx)_o\right) \#((\underline{A}/K)/ I) \quad .$$

Mais

$$I = \prod O_v/K \cap \prod O_v \quad ,$$

donc

$$\int_I (dx)_o = 1/\#(K \cap \prod O_v) \quad ,$$

et par suite la masse cherchée est

$$\int_{A/K} (dx)_o = \#((\underline{A}/K)/ I)/\#(K \cap \prod O_v) \quad .$$

En d'autres termes, si l'on considère la suite exacte

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow K \longrightarrow \underline{A}/\prod O_v \longrightarrow C \longrightarrow 0 \quad ,$$

où la flèche médiane est composée de l'injection (diagonale) de K dans $\underline{A}$ et de la projection sur $\underline{A}/\prod O_v$, on a

$$\int_{A/K} (dx)_o = \#C/\#N \quad .$$

Or $\underline{A}/\prod O_v = \oplus K_v/O_v$, et $K \longrightarrow \oplus K_v/O_v$ n'est autre que la résolution de Cousin de $\underline{O}$ sur X_o :

$$0 \longrightarrow \underline{O}_{X_o} \longrightarrow K \longrightarrow K/\underline{O}_{X_o} \longrightarrow 0 \quad ,$$

de sorte que

$$N = H^o(X_o,\underline{O}) \quad , \quad C = H^1(X_o,\underline{O}) \quad .$$

Donc

(2.1.1) $\int_{\underline{A}/K} (dx)_o = \# H^1(X_o,\underline{O})/\# H^o(X_o,\underline{O})$,

ou encore, si X_o est lisse, géométriquement irréductible sur $\mathbb{F}_q$, et de genre g,

(2.1.2) $\int_{\underline{A}/K} (dx)_o = q^{g-1}$

Si l'on pose $dx_v = a_v(dx_v)_o$, on a donc

$$1 = \int_{\underline{A}/K} dx = \int_{\underline{A}/K} \prod a_v(dx_v)_o = (\prod a_v) q^{g-1} ,$$

d'où, par (II 2.1.4),

$$\prod \varepsilon_v(\underline{F},\psi_v,dx_v) = (\prod a_v)^{\dim(\underline{F}_\eta)} \prod \varepsilon_v(\underline{F},\psi_v,(dx_v)_o)$$

$$= q^{(1-g)\dim(\underline{F}_\eta)} \prod \varepsilon_v(\underline{F},\psi_v,(dx_v)_o) ,$$

et la conjecture (II 2.3) se récrit

(2.1.3) $\varepsilon(\underline{F}) = q^{(1-g)\dim(\underline{F}_\eta)} \prod \varepsilon_v(\underline{F},\psi_v,(dx_v)_o)$.

2.2. Caractères additifs et formes différentielles.

Comment construire un caractère additif (non trivial)

$$\psi : \underline{A}/K \longrightarrow \mu_p \subset \mathbb{C}^* \quad ?$$

Voici une méthode. On considère une forme différentielle rationnelle ω sur la courbe X_o (lisse, géométriquement connexe) sur $\mathbb{F}_q$. En chaque place $v \in |X_o|$, si $f \in K_v$, on peut considérer le résidu $\mathrm{Res}_v(f\omega) \in k(v)$, puis $\mathrm{Tr}_{k(v)/\mathbb{F}_p} \mathrm{Res}_v(f\omega) \in \mathbb{F}_p$, et enfin, si on choisit un isomorphisme

$$\psi_o : \mathbb{F}_p \xrightarrow{\sim} \mu_p \subset \mathbb{C}^* ,$$

former $\psi_o \mathrm{Tr}_{k(v)/\mathbb{F}_p} \mathrm{Res}_v(f\omega) \in \mathbb{C}^*$. A partir de ω , on obtient ainsi, pour chaque v , un caractère additif de K_v . Le point est que, grâce à la formule des résidus(*), la famille de ces caractères définit un caractère additif de $\underline{A}/K$. De plus, du fait que le dual de Pontrjagin de $\underline{A}/K$ est K , comme on l'a déjà rappelé, l'application qui à une forme rationnelle ω associe le caractère additif ψ_ω qu'on vient de définir est une bijection de $\Omega^1_{K/\mathbb{F}_q}$ sur l'ensemble des caractères additifs de $\underline{A}/K$. Notons aussi en passant que, pour $\psi = \psi_\omega$, et $v \in |X_o|$, on a

---

(*) Cf. [Serre, Groupes algébriques et corps de classes, chap. II] (le corps de base est supposé là algébriquement clos, mais on s'y ramène facilement).

(2.2.1) $\quad n(\psi_v) = \text{valuation en } v \text{ de } \omega$,

d'ou la formule (III 2.3.1.1).

2.3. <u>Déterminant de H^*</u> <u>et cohomologie de puissances symétriques</u>.

Soient $\overline{k}$ un corps algébriquement clos, $X/\overline{k}$ une courbe propre et lisse, et $\underline{F}$ un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau sur X . On se propose de "calculer fonctoriellement" $\det H^*(X,\underline{F})$. Pour simplifier, nous ferons l'hypothèse

(2.3.1) $\quad H^0(X,\underline{F}) = H^2(X,\underline{F}) = 0$.

Si on traite à part le cas des faisceaux à support fini, et celui des faisceaux constants, on se ramène facilement à ce cas par dévissage. Posons $N=\dim H^1(X,\underline{F})$. Alors

$$(\det H^*(X,\underline{F}))^\vee = \bigwedge^N H^1(X,\underline{F}) \quad ,$$

et $\bigwedge^N H^1(X,\underline{F})$ se plonge dans l'espace $\otimes^N H^1(X,\underline{F})$, lequel, par la formule de Künneth (et grâce au fait que $H^0 = H^2 = 0$) , s'identifie à $H^N(X^N, \boxtimes^N \underline{F})$, où $\boxtimes^N \underline{F} \overset{\text{dfn}}{=} \otimes\, pr_i^* \underline{F}$. Notons aussi que $H^i(X^N,\boxtimes^N \underline{F}) = 0$ pour $i \neq N$. Observons que le groupe symétrique $\mathfrak{S}_N$ opère de façon naturelle sur $(X^N,\boxtimes^N \underline{F})$, et aussi sur $\otimes^N H^1(X,\underline{F})$ (par $\mathrm{sgn}(\sigma)\sigma$) , et que l'isomorphisme de Künneth

$$\otimes^N H^1(X,\underline{F}) \xrightarrow{\sim} H^N(X^N,\boxtimes^N \underline{F})$$

est équivariant. On a donc

(2.3.2) $\quad (\det H^*(X,F))^\vee = H^N(X^N,\boxtimes^N F)^{\mathfrak{S}_N}$.

Notons

$$\pi : X^N \longrightarrow \mathrm{Sym}^N X$$

la projection canonique. Comme π est fini, la suite spectrale de Leray fournit un isomorphisme canonique $\mathfrak{S}_N$ -équivariant

$$H^N(X^N,\boxtimes^N F) = H^N(\mathrm{Sym}^N X,\pi_*(\boxtimes^N F)) \quad ,$$

donc

(*) $\quad H^N(X^N,\boxtimes^N F)^{\mathfrak{S}_N} = H^N(\mathrm{Sym}^N X,\pi_*(\boxtimes^N F))^{\mathfrak{S}_N}$.

Enfin, comme la cohomologie du groupe fini $\mathfrak{S}_N$ à valeurs dans un $\mathbb{Q}$-vectoriel est triviale, le second membre de (*) s'identifie canoniquement à $H^N(\mathrm{Sym}^N X,(\pi_*(\boxtimes^N F))^{\mathfrak{S}_N})$.

Donc, compte tenu de (2.3.2), on obtient un isomorphisme fonctoriel canonique

$$(2.3.3) \qquad (\det H^*(X,\underline{F}))^\vee = H^N(\mathrm{Sym}^N X, (\pi_*(\boxtimes^N \underline{F}))^{\mathfrak{S}_N}) \quad .$$

et

$$(2.3.4) \qquad H^i(\mathrm{Sym}^N X, (\pi_*(\boxtimes^N \underline{F})^{\mathfrak{S}_N}) = 0$$

pour $i \neq N$. Katz fait observer que (2.3.3) masque assez bien le fait que le premiet membre soit de dimension 1 !

EXPOSE V (19 février 1980)

1. Passage de $\mathbb{F}_p$ à $\mathbb{F}_q$.

Soient X_o une courbe propre et lisse sur $\mathbb{F}_p$, connexe, et $\underline{F}_o$ un faisceau ℓ-adique sur X_o . On note $X/\mathbb{F}$ la courbe déduite par extension des scalaires à une clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$ et $\underline{F}$ le faisceau image inverse de $\underline{F}_o$ sur X . On veut calculer

(1.1) $\quad \zeta(\underline{F}_o) = \det(-F, H^*(X,\underline{F}))^{-1}$.

Parfois, X_o est donnée comme courbe propre et lisse, géométriquement connexe sur $\mathbb{F}_q$ (i.e. telle que $X_o \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}$ soit connexe), et il est plus commode de "rester" sur $\mathbb{F}_q$, en ne considérant que le Frobenius F_q relatif à $\mathbb{F}_q$ et son action sur $X_o \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}$, plutôt que de considérer X_o comme courbe sur $\mathbb{F}_p$ .On a besoin pour cela de savoir comparer les cohomologies de $X_o \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}$ et $X_o \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}$, ainsi que l'expression au second membre de (1.1) avec l'expression analogue avec F_q , $X_o \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}$. Tout d'abord, si $q = p^n$, $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q) \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}$ est un ensemble de n points, dont le Frobenius absolu F est une permutation circulaire :

$$(1.2) \qquad \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q) \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F} = \coprod_{\mathrm{Hom}(\mathbb{F}_q,\mathbb{F})} \mathrm{Spec}(\mathbb{F}) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/n \ , \ Fi = i+1) \quad .$$

Il en résulte que $X_o \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}$ se décompose en

$$(1.3) \quad X = X_o \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F} = \coprod_{\mathrm{Hom}(\mathbb{F}_q,\mathbb{F})} X_o \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F} \quad ,$$

F envoyant le composant d'indice i sur le composant d'indice Fi . On en déduit une décomposition de $H^*(X,\underline{F})$ en

$$(1.4) \qquad H^*(X,\underline{F}) = \bigoplus_{i \in \mathrm{Hom}(\mathbb{F}_q,\mathbb{F})} H_i^* \quad .$$

L'action de F par transport de structure permute cycliquement les morceaux H_i^* , et F^n induit un automorphisme de chaque morceau H_i^* , qui n'est autre que l'automorphisme F_q défini par le Frobenius géométrique de $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{F}_q)$.

Lemme 1.5. Soient $(V_i)_{i \in \mathbb{Z}/n}$ une famille d'espaces vectoriels sur un corps K , $(F_i : V_i \longrightarrow V_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}/n}$ une famille d'homomorphismes, et F l'endomorphisme de $V = \bigoplus V_i$ donné par la somme des F_i , de sorte que l'endomorphisme F^n laisse stable chaque V_i . Alors on a, pour tout i,

(i) $\det(-F,V) = \det(-F^n,V_i)$

(ii) $\det(1-Ft,V) = \det(1-F^n t^n,V_i)$

Noter que (ii) $\Rightarrow$(i) (faire tendre t vers ∞). Prouvons (ii). Quitte à remplacer V_i par $V_i \oplus W_i$ et F_i par $F_i \oplus 0$, on peut supposer que tous les V_i ont la même dimension. Par prolongement des identités, on peut supposer que tous les F_i sont des isomorphismes. Par ailleurs, on peut supposer K algébriquement clos, voire $K = \mathbb{C}$. Identifiant V_1 à V_o par F_o^{-1}, V_2 à V_o par $F_o^{-1}F_1^{-1}$, etc., on se ramène au cas où $V_i = V_o$ pour tout i, $F_i = \mathrm{Id}$ pour $0 \leq i \leq n-1$. Par prolongement des identités, on peut supposer F_{n-1} diagonalisable, ce qui ramène au cas où $V_o = K$, $F_{n-1} = a \in K$. L'identité (ii) se réduit à

$$(*) \qquad \det(1-Ft,V) = 1 - at^n \quad .$$

Or $F^n = a$, donc $(K = \mathbb{C})$ F est diagonalisable et a pour polynôme caractéristique t^n-a , d'où (*).

Corollaire 1.6. Pour X_o propre et lisse sur $\mathbb{F}_q$, notant $\underline{F}$ l'image inverse du faisceau ℓ-adique $\underline{F}_o$ sur $X_o \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}$ ou sur $X_o \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}$, et F_q le Frobenius relatif à $\mathbb{F}_q$, on a

$$\det(-F,H^*(X_o \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F},\underline{F})) = \det(-F_q,H^*(X_o \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F},\underline{F})) \quad .$$

Remarque 1.7. La formule 1.6 n'est qu'un cas particulier de la compatibilité des fonctions L aux images directes, où l'on considère le morphisme $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q) \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$.

2. Etude locale de puissances symétriques.

2.1. Soient X un schéma sur un corps algébriquement clos k de car. p , $\underline{F}$ un faisceau sur X de A-modules plats, où A est un anneau commutatif, de torsion première à p . Soit n entier ≥ 1 . Sur X^n , on peut considérer le faisceau

$$\boxtimes^n \underline{F} \overset{\mathrm{df}n}{=} \bigotimes_i pr_i^* \underline{F} \quad ,$$

sur lequel le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ opère de façon compatible avec son action sur X^n . Soit $\mathrm{Sym}^n X$ l'espace quotient de X^n par $\mathfrak{S}_n$, notons

$$\pi : X^n \longrightarrow \mathrm{Sym}^n(X)$$

la projection canonique. L'action de $\mathfrak{S}_n$ sur $(X^n, \boxtimes^n \underline{F})$ donne une action de $\mathfrak{S}_n$ sur $\pi_*(\boxtimes^n \underline{F})$, on pose

(2.1.1) $\qquad \Gamma^n_{\mathrm{ext}}(\underline{F}) = (\pi_*(x^n \underline{F}))^{\mathfrak{S}_n}$.

Dans le cas où $X = \mathrm{Spec}(k)$,

$$\Gamma^n_{\mathrm{ext}}(\underline{F}) = \Gamma^n(\underline{F})$$

est le module des tenseurs symétriques de degré n . Nous examinerons plus loin la structure locale de Γ^n_{ext}.

Rappelons le cas particulier important rencontré en (IV 2.3) :

<u>Proposition</u> 2.2. Soient X/k une courbe lisse, complète, et $\underline{F}$ un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau sur X tel que $H^o(X,\underline{F}) = H^2(X,\underline{F}) = 0$, et $\dim H^1(X,\underline{F}) = d$. Alors on a :

$$H^i(\mathrm{Sym}^d(X),\Gamma^d_{\mathrm{ext}}(\underline{F})) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq d \\ \bigwedge^d H^1(X,\underline{F}) & \text{si } i = d \end{cases} .$$

(Il s'agit bien sûr ici de la variante de Γ^n_{ext} relative aux $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux, que l'on peut définir, à partir de (2.1.1), par passage à la limite).

2.3. On se propose d'étudier la structure locale de $(\mathrm{Sym}^n(X),\Gamma^n_{\mathrm{ext}}(\underline{F}))$ quand X/k est une courbe lisse. Rappelons d'abord le fait bien connu suivant :

<u>Proposition</u> 2.3.1. Soit X/k une courbe lisse. Le schéma $\mathrm{Sym}^n(X)$ est canoniquement isomorphe au schéma $\mathrm{Div}^n(X)$ des diviseurs (effectifs) de degré n sur X .

Plus précisément, la flèche $X^n \longrightarrow \mathrm{Div}^n(X)$ donnée par $(x_1,\dots,x_n) \longmapsto \sum x_i$ (après extension à une base quelconque S) est $\mathfrak{S}_n$-équivariante et fournit un isomorphisme

(2.3.1.1) $\qquad \mathrm{Sym}^n(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Div}^n(X)$.

On le démontre en construisant une flèche inverse de (2.3.1.1) (SGA 4 XVII 6.3.9). Bornons-nous à le vérifier pour $X = \mathrm{Spec}(k[T])$. On a alors

$$\mathrm{Sym}^n(X) = \mathrm{Spec}(k[X_1,\dots,X_n]^{\mathfrak{S}_n}) = \mathrm{Spec}(k[\sigma_1,\dots,\sigma_n]) ,$$

où les σ_i sont les fonctions symétriques élémentaires des X_i . D'autre part, la donnée d'un élément de $\mathrm{Div}^n(X)$ équivaut à celle d'un polynôme à coefficient dominant 1 , $s_n + s_{n-1}T + \dots + T^n$, de sorte que

$\mathrm{Div}^n(X) = \mathrm{Spec}(k[s_1,\dots,s_n])$.

Or l'application (2.3.1.1) envoie σ_n sur $(-1)^n s_n$, d'où le résultat dans ce cas.

Corollaire 2.3.2. Si X/k est une courbe lisse, $\mathrm{Sym}^n(X)$ est lisse.

En effet, $\mathrm{Div}^n(X)$ est lisse, car il n'y a pas d'obstruction à relever infinitésimalement des diviseurs sur une courbe.

Il est facile (et nous sera utile plus loin) de décrire l'espace tangent à $\mathrm{Sym}^n(X)$ en un point :

Corollaire 2.3.3. Soient X/k une courbe lisse, et D un point de $\mathrm{Sym}^n(X)$ défini par un diviseur (effectif) de degré n . Alors l'espace tangent $T_{\mathrm{Sym}^n(X),D}$ à $\mathrm{Sym}^n(X)$ au point D est canoniquement isomorphe à $H^o(X,\underline{O}(D)/\underline{O})$.

Vu l'interprétation de $\mathrm{Sym}^n(X)$ comme espace de diviseurs, il s'agit d'un cas particulier du résultat bien connu donnant l'espace tangent au schéma de Hilbert en un point Y comme $H^o(Y,\underline{N}_Y)$ où $\underline{N}_Y$ est le faisceau normal : ici Y = D , et $\underline{N}_Y = \underline{O}(D)/\underline{O}$. On peut retrouver ce résultat élémentairement en cherchant à prolonger $D \subset X$ en un diviseur (relatif) sur $X \otimes k[\varepsilon]$. Si f est une équation locale de D près d'un point, une déformation de D près de ce point est donnée par $f + \varepsilon g$, modulo un facteur inversible $1 + \varepsilon h$, ce qui revient à remplacer g par $g + hf$. On trouve ainsi un isomorphisme entre l'espace des prolongements locaux et $\underline{O}/(f)$. Mais cet isomorphisme dépend du choix de l'équation f . Or on observe que, si l'on remplace f par λf (λ inversible), et g par λg , $f^{-1}g$ ne change pas et l'élément de $f^{-1}\underline{O}/\underline{O}$ correspondant ne dépend plus que de D . On trouve donc comme espace des prolongements de D

$$\coprod_{x \in \mathrm{Supp}(D)} (f_x^{-1}\underline{O}_x)/\underline{O}_x = H^o(X, \underline{O}(D)/\underline{O}) .$$

Remarque 2.3.4. Les calculs précédents peuvent se faire "avec paramètres", et 2.3.1, 2.3.2, 2.3.3 se généralisent à une courbe lisse sur une base S .

2.5. Soient X/k une courbe lisse, et $D = \sum_{i=1}^{r} n_i P_i \in \mathrm{Sym}^n(X)$, les P_i étant distincts. A quoi ressemble $\mathrm{Sym}^n(X)$ près de D ? Rappelons que $\mathrm{Sym}^n(X) = X^n/\mathfrak{S}_n$, et que D est l'image du point $P = (P_1,\dots,P_1,P_2,\dots,P_2,\dots)$ de X^n , où P_i est répété n_i fois. Le stabilisateur de P est $\prod \mathfrak{S}_{n_i}$. Or on a le résultat général suivant :

<u>Lemme</u> 2.5.1 (SGA 1 V 2.2). Soient Y un schéma sur lequel opère un groupe fini H , y un point de Y , H_y le stabilisateur de y . Alors le morphisme canonique $Y/H_y \longrightarrow Y/H$ est étale au voisinage des images de y .

Dans la situation ci-dessus, si l'on note $D_i = n_i P_i \in \mathrm{Sym}^{n_i}(X)$, la flèche canonique

$$(2.5.2) \qquad \coprod \mathrm{Sym}^{n_i}(X) \longrightarrow \mathrm{Sym}^n(X) \quad ,$$

qui envoie $(D_1,\dots,D_r)$ sur D , est donc étale au voisinage de $(D_1,\dots,D_r)$. Dans la suite, cette remarque nous permettra fréquemment de nous ramener au cas d'un diviseur de support réduit à un point.

Sous les conditions de 2.5.1, supposons que $\underline{F}$ soit un faisceau étale sur Y . Alors, si $Y \xrightarrow{\pi'} Y/H_y \xrightarrow{j} Y/H$ sont les flèches canoniques, l'application canonique (où $\pi = j\,\pi'$)

$$(\pi'_{*}\underline{F})^{H_y} \longrightarrow j^{*}(\pi_{*}\underline{F})^{H}$$

est un isomorphisme, pour la topologie étale, au voisinage des images de y . En particulier :

<u>Corollaire</u> 2.5.3. Localement pour la topologie étale, $(\mathrm{Sym}^n(X), \Gamma^n_{\mathrm{ext}}(\underline{F}))$ est, près de D, isomorphe à $(\coprod \mathrm{Sym}^{n_i}(X), \boxtimes\, \Gamma^{n_i}_{\mathrm{ext}}(\underline{F}))$ près de $(D_1,\dots,D_r)$.

2.5.4. On notera que, tandis que $\mathrm{Sym}^n(X)$ est lisse, les faisceaux $\Gamma^n_{\mathrm{ext}}(\underline{F})$, même si $\underline{F}$ est lisse, ont en général des singularités. En effet, supposons d'abord que D = nP , et calculons la fibre de $\Gamma^n_{\mathrm{ext}}(\underline{F})$ en D . L'unique point de X^n au-dessus de D est le point (P,...,P), donc

$$\Gamma^n_{\mathrm{ext}}(\underline{F})_D = (\boxtimes^n \underline{F})^{\mathfrak{S}_n}_{(P,\dots,P)} = \Gamma^n(\underline{F}_P) \; .$$

En général, si $D = \sum n_i P_i$, les P_i étant distincts, on aura

$$(2.5.4.1) \qquad \Gamma^n_{\mathrm{ext}}(\underline{F})_D = \otimes\, \Gamma^{n_i}(\underline{F}_{P_i}) \quad ,$$

et le rang de $\Gamma^n_{\mathrm{ext}}(\underline{F})_D$ va varier avec D . La formule (2.5.4.1) montre aussi que, si $\underline{F}$ est un faisceau de A-modules plats, il en est de même de $\Gamma^n_{\mathrm{ext}}(\underline{F})$.

3. <u>Cas d'un faisceau de rang un, non ramifié.</u>

3.1. Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique p, X/k une courbe propre et lisse, connexe, $\underline{F}$ un faisceau ℓ-adique sur X , non ramifié, et de rang 1 .

D'après (2.5.4.1), $\Gamma_{ext}^{n}(\underline{F})$ est alors de rang 1 en tout point. En fait, $\Gamma_{ext}^{n}(\underline{F})$ est même lisse (= localement constant) de rang un, comme on le vérifie aisément à l'aide de 2.5.3, en considérant les flèches de spécialisation. Supposons de plus que l'on ait :

(3.1.1) $\quad H^{o}(X,\underline{F}) = H^{2}(X,\underline{F}) = 0$,

de sorte que, par la formule d'Euler-Poincaré,

(3.1.2) $\quad \dim H^{1}(X,\underline{F}) = 2g - 2$,

où g est le genre de X. Notons en passant que (3.1.1) entraîne que l'on a $g > 0$: en effet, si l'on avait $g = 0$, $\underline{F}$ serait constant car $\mathbb{P}^{1}$ est simplement connexe, donc $H^{o}(X,\underline{F})$ serait de dimension 1.

Dans ce cas très simple, nous allons pouvoir calculer complètement $\det H^{*}(X,\underline{F})$. Bien que ce calcul ne conduise pas à des résultats nouveaux, nous allons le faire en détail, car la même méthode nous servira plus tard à traiter des cas plus compliqués.

3.2. Le point de départ est l'isomorphisme canonique (IV 2.3), 2.2,

(3.2.1) $\quad (\det H^{*}(X,\underline{F}))^{\vee} \; = \; H^{2g-2}(\mathrm{Sym}^{2g-2}(X),\Gamma_{ext}^{2g-2}(\underline{F}))$.

On va étudier le second membre à l'aide de la projection canonique

(3.2.2) $\quad f : \mathrm{Sym}^{2g-2}(X) \longrightarrow J^{2g-2}(X) = J^{2g-2}$,

où J^{2g-2} est la composante de degré 2g-2 de Pic_X , $\mathrm{Sym}^{2g-2}(X)$ étant bien entendu identifié à $\mathrm{Div}^{2g-2}(X)$ par 2.3.1.

Si $\underline{L}$ est un faisceau inversible de degré $2g - 2$ sur X , la fibre de f au-dessus du point correspondant de J^{2g-2} se compose des diviseurs D tels que $\underline{O}_X(D) \xrightarrow{\sim} L$, i.e. des sections globales de $\underline{L}$, $\neq 0$, modulo homothétie. En d'autres termes, avec la notation de Grothendieck pour les fibrés projectifs,

(3.2.3) $\quad f^{-1}(\underline{L}) = \mathbb{P}(H^{o}(X,\underline{L})^{\vee})$.

Calculons la dimension de cette fibre. On a

$$\chi(X,\underline{L}) = 1 - g + (2g - 2) \; ,$$

donc

$$\dim H^{o}(X,\underline{L}) = g - 1 + \dim H^{1}(X,\underline{L}) = g - 1 + h^{o}(\Omega^{1}_{X} \otimes \underline{L}^{-1}) .$$

Comme $\Omega^{1}_{X} \otimes \underline{L}^{-1}$ est de degré 0 , ou bien $\Omega^{1}_{X} \otimes \underline{L}^{-1}$ est trivial, et alors $h^{o} = 1$, ou bien $\Omega^{1}_{X} \otimes \underline{L}^{-1}$ est non trivial, et $h^{o} = 0$. Donc :

Lemme 3.2.4. Si $\underline{L} \simeq \Omega^{1}_{X}$, alors $\dim H^{o}(X,\underline{L}) = g$, et donc $\dim f^{-1}(\underline{L}) = g-1$. Si $\underline{L} \not\simeq \Omega^{1}_{X}$, alors $\dim H^{o}(X,\underline{L}) = g-1$, donc $\dim f^{-1}(\underline{L}) = g-2$.

En d'autres termes, en dehors de la classe canonique $K \in J^{2g-2}$, la fibre de f est $\mathbb{P}^{g-2}$, tandis que la fibre de f en K est $\mathbb{P}^{g-1}$. En fait, il n'est pas difficile de montrer (cf. exposé suivant) que, hors de K, f est un fibré projectif de rang g-2, et que, près de K, $\mathrm{Sym}^{2g-2}(X)$ est le sous-schéma fermé de $(\mathbb{P}^{g-1})_{J^{2g-2}}$ défini par $\sum_{i=1}^{g} t_i X_i = 0$, où (X_i) est un système de coordonnées homogènes sur $\mathbb{P}^{g-1}$ et (t_i) un système de coordonnées locales sur J^{2g-2} en K

Comme un espace projectif est simplement connexe, le faisceau localement constant $\Gamma^{2g-2}_{ext}(\underline{F})$ sur $\mathrm{Sym}^{2g-2}(X)$ est constant sur chaque fibre de f . Plus précisément, la flèche canonique

(3.2.5) $\quad f^{*}f_{*}\Gamma^{2g-2}_{ext}(\underline{F}) \longrightarrow \Gamma^{2g-2}_{ext}(\underline{F})$

est un isomorphisme, et

$$\underline{G} = f_{*}\Gamma^{2g-2}_{ext}(\underline{F})$$

est localement constant de rang 1 sur J^{2g-2} . De (3.2.5) résulte, par la formule de projection, que

(3.2.6) $\quad R^{i}f_{*}\Gamma^{2g-2}_{ext}(\underline{F}) = \underline{G} \otimes R^{i}f_{*}\mathbb{Q}_{\ell}$.

Compte tenu de la description de f donnée ci-dessus, on a

(3.2.7) $$R^{i}f_{*}\mathbb{Q}_{\ell} = \begin{cases} \mathbb{Q}_{\ell}(-i/2) & \text{si } i \text{ est pair et } 0 \leq i \leq 2(g-2) \\ \mathbb{Q}_{\ell}(-(g-1)) \text{ en K prolongé par zéro ailleurs} & \text{si } i = 2(g-1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Lemme 3.2.8. On a $H^{i}(J^{2g-2},\underline{G}) = 0$ pour tout i .

En effet, posant $J^{2g-2} = J$, on a

$$H^{o}(J,\underline{G}) = H^{o}(\mathrm{Sym}^{2g-2}(X),\Gamma^{2g-2}_{ext}(\underline{F})) \quad ,$$

donc, si $g > 1$, $H^o(J,\underline{G}) = 0$ par 2.2, et si $g = 1$, $H^o(J,\underline{G}) = 0$ par hypothèse car $J = X$ et $\underline{G} = \underline{F}$. Comme $\underline{G}$ est localement constant de rang 1, il s'ensuit que $H^i(J,\underline{G}) = 0$ pour tout i .

Pour la démontrer, on peut par exemple se ramener au cas où $k = \mathbb{C}$, et utiliser $J(\mathbb{C})$, muni de sa topologie classique, pour calculer la cohomologie. Si $H^o(J(\mathbb{C}),\underline{G}) = 0$, il existe $\sigma \in \pi_1(J(\mathbb{C}),0)$ agissant non trivialement sur la fibre en 0 du faisceau localement constant $\underline{G}$. Soit $\gamma(t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ un chemin qui représente σ . La famille continue d'applications

$s_t : J(\mathbb{C}) \longrightarrow J(\mathbb{C}) : x \longmapsto x + \gamma(t)$ se relève au faisceau G :

on a $s_t^* : s_t^* G \xrightarrow{\sim} \underline{G}$. Les (s_t, s_t^*) agissent sur $H^*(J(\mathbb{C}),G)$. En $t = 0$, donc toujours, l'action est triviale. En $t = 1$, $s_t = \mathrm{Id.}$, et s_t^* est la multiplication par $\lambda \neq 1$. Sur $H^*(J(\mathbb{C}), G)$, la multiplication par λ est donc l'identité : on a $H^* = 0$.

Considérons la suite spectrale de Leray

$$(3.2.9) \qquad E_2^{ij} = H^i(J,R^j f_* \Gamma_{ext}^{2g-2}(\underline{F})) \Rightarrow H^*(\mathrm{Sym}^{2g-2}(X),\Gamma_{ext}^{2g-2}(\underline{F})) \quad .$$

Compte tenu de 3.2.6, 3.2.7 et 3.2.8, le seul terme E_2^{ij} non nul est

$$E_2^{o,2g-2} = \underline{G}_K(-(g-1)) \quad .$$

Mais, d'après (3.2.3) et la définition de $\underline{G}$,

$$\underline{G}_K = H^o(|K| \ , \Gamma_{ext}^{2g-2}(\underline{F})) \quad ,$$

où $|K| = P(H^o(X,\Omega^1)^\vee)$ est le système linéaire défini par K . En conclusion :

<u>Théorème</u> 3.2.10. Sous les hypothèses de 3.1, il existe un isomorphisme fonctoriel canonique

$$(\det H^*(X,\underline{F}))^{-1} = H^o(|K|, \Gamma_{ext}^{2g-2}(\underline{F}))(1-g),$$

où $|K|$ est le système linéaire ($\simeq \mathbb{P}^{g-1}$) défini par la classe canonique K .

Noter que $H^o(|K| \ , \Gamma_{ext}^{2g-2}(\underline{F}))$ peut encore s'interpréter comme la valeur constante de $\Gamma_{ext}^{2g-2}(\underline{F})$ sur $|K|$.