SEMINAIRE DE P. DELIGNE A L'IHES 1980

"LES CONSTANTES DES EQUATIONS FONCTIONNELLES

DES FONCTIONS L "

EXPOSE I (15 janvier 1980)

1. Rappels sur les $\mathbb{Q}_\ell$-faisceaux.

Soient $\mathbb{F}_q$ un corps fini de car. p, $\mathbb{F}$ une clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$, $X_o/\mathbb{F}_q$ une courbe propre et lisse, géométriquement connexe, $X/\mathbb{F}$ la courbe déduite de X_o par extension des scalaires. Rappelons la définition d'un $\mathbb{Q}_\ell$-faisceau sur X_o.

1.1. Aspect galoisien. Soit K_o le corps des fonctions de X_o. Notons $\overline{K}$ une clôture séparable de K_o. $\overline{K}$ est réunion de ses sous-extensions galoisiennes finies K_α, on note $Gal(\overline{K}/K_o) = \varprojlim Gal(K_\alpha/K_o)$ le groupe de Galois correspondant. Soit $|X_o|$ l'ensemble des points fermés de X_o ; ceux-ci correspondent comme on sait aux places de K_o. Si v est une place de K_o, notons $(K_o)_v$ le complété de K_o en v. Si w est une place, au-dessus de v, d'une extension finie K_α de K_o comme ci-dessus, le groupe $D_{\alpha,w} = Gal(K_{\alpha,w}/K_{o,v})$ (où $K_{\alpha,w}$ est le complété de K en w) est par définition le groupe de décomposition de w (c'est encore le sous-groupe de $Gal(\overline{K}/K_o)$ laissant fixe w. Il s'envoie sur le groupe de Galois de l'extension résiduelle $k(w)/k(v)$, et par définition le noyau $I_{\alpha,w}$ est le sous-groupe d'inertie en w :

$$(1.1.1) \qquad 1 \longrightarrow I_{\alpha,w} \longrightarrow Gal(K_{\alpha,w}/K_{o,v}) \longrightarrow Gal(k(w)/k(v)) \longrightarrow 1 .$$

Rappelons que, pour une extension K_α donnée, $I_{\alpha,w}$ est trivial pour toute place v sauf un nombre fini. Passant à la limite sur les K_α, on déduit de (1.1.1), pour une place w de $\overline{K}$ au-dessus de v, une suite exacte de groupes profinis

$$(1.1.2) \qquad 1 \longrightarrow I_w \longrightarrow D_w \longrightarrow \underset{(=\hat{\mathbb{Z}})}{Gal(\overline{k(v)}/k(v))} \longrightarrow 1 ,$$

où D_w (resp. I_w) est appelé groupe de décomposition (resp. d'inertie) de w. Les places w au-dessus de v sont conjuguées par $Gal(\overline{K}/K)$, qui conjugue entre eux les D_w.

Par un $\mathbb{Q}_\ell$-faisceau $\underline{F}$ sur X_o on entend les données (a) et (b) suivantes :

(a) un $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel de dimension finie $\underline{F}_{\overline{K}}$, muni d'une action (continue) de $Gal(\overline{K}/K_o)$, telle que, sauf pour un nombre fini de places v, le groupe d'inertie I_w de toute place w au-dessus de v agisse trivialement. Cette condition signifie qu'il existe un ensemble fini S de places de K_o tel que l'action de $Gal(\overline{K}/K_o)$ se factorise à travers le quotient $Gal(K_{nr,S}/K_o)$, où $K_{nr,S}$ désigne la plus grande sous-extension de $\overline{K}$ non ramifiée en dehors de S .

(b) Notant, pour chaque place v de K_o , $\overline{v}$ une place de $\overline{K}$ au-dessus, on se donne, pour chaque v, un $\mathbb{Q}_l$-espace vectoriel de dimension finie $\underline{F}_{\overline{v}}$ muni d'une action (continue) du groupe de Galois de l'extension résiduelle $Gal(k(\overline{v})/k(v)) = \hat{\mathbb{Z}}$ et une application linéaire $\underline{F}_{\overline{K}} \longleftarrow \underline{F}_{\overline{v}}$, équivariante pour l'homomorphisme naturel $D_{\overline{v}} \longrightarrow \hat{\mathbb{Z}}$ (1.1.2) , dite <u>flèche de spécialisation</u>. On exige que cette flèche soit un isomorphisme sauf en un nombre fini de places (condition qui contient d'ailleurs celle de (a)).

Rappelons enfin qu'on a deux générateurs naturels de $Gal(\mathbb{F}/\mathbb{F}_q) \simeq \hat{\mathbb{Z}}$: l'automorphisme $\phi : x \longmapsto x^q$, dit <u>Frobenius arithmétique</u>, et son inverse $F = \phi^{-1}$, dit <u>Frobenius géométrique</u>.

1.2. <u>Interprétation topologique</u>. On peut voir $Spec(\mathbb{F}_q)$, qui est un $K(\hat{\mathbb{Z}},1)$, comme un <u>cercle</u> C . $Spec(\mathbb{F})$ en est un revêtement universel, qu'on peut donc se représenter comme une droite, ou, ce qui revient au même du point de vue homotopique, comme un point-base dans C . Dans cette optique, la courbe $X_o/\mathbb{F}_q$ s'interprète comme une variété (de dimension topologique 3) fibrée en surfaces de Riemann sur C , X est la fibre au-dessus du point-base. Un point fermé de X_o , rationnel sur $\mathbb{F}_{q^n}$, correspond à une quasi-section étale de X_o/C , de degré fini (divisant n) . La représentation $\underline{F}_{\overline{K}}$ ci-dessus (a) correspond à un faisceau localement constant sur le complément, dans la "variété" X_o ,d'un ensemble fini S de quasi-sections étales, i.e. à une représentation du groupe fondamental $\pi_1(X_o-S)$. Pour interpréter (b), il est commode d'imaginer K_v comme un voisinage tubulaire T_v de la quasi-section étale S_v correspondant à v , privé de S_v . Une extension finie de K_o donne Y_o fini sur X_o , et une place w au-dessus de v est une quasi-section étale de Y_o au-dessus de v . Le groupe de décomposition D_w est le sous-groupe du groupe d'automorphismes de

Y_o/X_o qui laisse stable cette quasi-section S_w, et I_w le sous-groupe de D_w qui agit trivialement sur le revêtement S_w/S_v. Ainsi, l'homomorphisme $D_{\overline{v}} \longrightarrow \hat{\mathbb{Z}}$ (1.1.2) apparaît comme l'homomorphisme $\pi_1(T_v - S_v) \longrightarrow \pi_1(T_v) = \pi_1(S_v)$ induit par l'injection de $T_v - S_v$ dans S_v, dont le noyau est le groupe fondamental de la fibre de $T_v - S_v \longrightarrow S_v$ au "point" $\overline{v}$ de S_v. La représentation $F_{\overline{v}}$ correspond à un faisceau localement constant sur S_v, et la flèche de spécialisation $F_{\overline{v}} \longrightarrow F_{\overline{K}}$ à un morphisme de la fibre de ce faisceau en $\overline{v}$ dans les invariants de $F_{\overline{K}}$ sous "l'inertie en $\overline{v}$", compatible à l'action du groupe fondamental de S_v.

1.3. Prolongements canoniques. Etant donné un objet V du type (a) (faisceau localement constant sur $X_o - S$), il y a deux manières canoniques de le prolonger en un Q_ℓ-faisceau sur X_o : (i) image directe, notée $j_*(V)$ (où $j : X_o - S \hookrightarrow X_o$ est l'inclusion) : consiste à prendre $F_{\overline{v}} = V^{I_{\overline{v}}}$ (invariants sous l'inertie), avec l'action naturelle de $\hat{\mathbb{Z}}$, et pour flèche $F_{\overline{v}} \longrightarrow F_{\overline{K}} = V$ l'inclusion naturelle ; (ii) prolongement par zéro, noté $j_! V$: consiste à prendre $F_{\overline{v}} = 0$.

1.4. $\overline{Q}_\ell$-faisceaux. Dans la suite, on considérera plutôt des $\overline{Q}_\ell$-faisceaux que des Q_ℓ-faisceaux. Rappelons ce qu'on entend par là. On a d'abord la notion de E_λ-faisceau, où E_λ est une extension finie de Q_ℓ : même définition que pour un Q_ℓ-faisceau, avec Q_ℓ remplacé par E_λ. Un $\overline{Q}_\ell$-faisceau est simplement un E_λ-faisceau pour une extension E_λ convenable : en d'autres termes, un système de représentations du type (a) et (b) ci-dessus, avec Q_ℓ remplacé par $\overline{Q}_\ell$, mais dont on exige qu'il admette une E_λ-structure (question : une telle structure existe-t-elle toujours ?).

1.5. Faisceaux de rang un standard. Soit E une extension finie de Q_ℓ. La donnée d'une unité t de E définit un caractère de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}/\mathbb{F}_q)$ de degré un, envoyant le Frobenius géométrique F sur t, d'où, via l'homomorphisme canonique $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K_o) \longrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}/\mathbb{F}_q)$, un $\overline{Q}_\ell$-faisceau sur X_o, localement constant de rang un, noté

(1.5.1) $$\overline{Q}_\ell^{(t)} .$$

Ce faisceau est "géométriquement constant", i.e. devient constant sur X.

En chaque place v , le générateur F_v (Frobenius géométrique) de $Gal(k(\overline{v})/k(v)) = \hat{\mathbb{Z}}$ agit sur la fibre $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ par multiplication par $t^{[k(v):\mathbb{F}_q]}$.

Le cas particulier le plus important de cette construction est celui où l'on prend $t = q^{-1}$. Le faisceau correspondant est noté $\overline{\mathbb{Q}}_\ell(1)$. Si $\underline{F}$ est un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau, et $n \in \mathbb{Z}$, on note $\underline{F}(n)$ le faisceau $\underline{F} \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell(n)$, où $\overline{\mathbb{Q}}_\ell(n) = \overline{\mathbb{Q}}_\ell(1)^{\otimes n} = \overline{\mathbb{Q}}_\ell^{(q^{-n})}$.

2. Fonctions L .

On se place désormais sur $\mathbb{F}_p$ plutôt que sur $\mathbb{F}_q$. On note $X_o/\mathbb{F}_p$ une courbe projective lisse (connexe, mais non nécessairement géométriquement connexe).

2.1. Soit $\underline{F}$ un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau sur X_o . La fonction L associée à $\underline{F}$ est par définition le produit infini

(2.1.1) $\quad L(\underline{F},T) = \prod_v \det(1-F_v T^{\deg(v)},\underline{F}_{\overline{v}})^{-1}$

étendu aux places v de X_o . (Penser à T "=" p^{-s}). On a $L(\underline{F},T) \in \overline{\mathbb{Q}}_\ell[[T]]$. Il est commode de "lire" le second membre comme

$$" \prod_v \det(1-F_v,\underline{F}^{(T)})^{-1} ",$$

notation qui a priori n'a pas de sens, mais traduit le comportement de la fonction L quand on tord $\underline{F}$ par un faisceau (1.5.1) :

(2.1.2) $\quad L(\underline{F}^{(t)},T) = L(\underline{F},tT)$.

Si V est une représentation de $Gal(\overline{K}/K_o)$ non ramifiée en dehors d'une partie finie S de X_o , alors V définit (1.3 (i)) un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau j_*V sur X_o . On convient d'appeler fonction L de V la fonction L de j_*V , qu'on notera simplement L(V,T). On a donc

(2.1.3) $\quad L(V,T) = \prod_{v \notin S} \det(1-F_v T,V) \prod_{v \in S} \det(1-F_v T,V^{I_{\overline{v}}})$.

Rappelons le résultat fondamental :

Théorème 2.2 (Grothendieck). (i) Pour tout $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau $\underline{F}$ sur X_o , la fonction $L(\underline{F},T)$ appartient à $\overline{\mathbb{Q}}_\ell(T)$.

(ii) Si V est une représentation de $Gal(\overline{K}/K_o)$ comme ci-dessus, et $V^\vee$ désigne la représentation contragrédiente, alors on a

(2.2.1) $\quad L(V,T) = \varepsilon(V,T)\, L(V^\vee(1),T^{-1})$, où $\varepsilon(V,T)$ est un monôme.

Remarques 2.3. D'après (2.2 (i)), on peut définir

(2.3.1) $L(\underline{F}) = L(\underline{F},1)$,

ce qui permet d'écrire

(2.3.2) $L(\underline{F},T) = L(\underline{F}^{(T)})$

(i.e. donne un sens à la convention d'écriture mentionnée en 2.1). La formule (2.2.1) se lit alors

(2.3.3) $L(V) = \varepsilon(V,1)L(V^{\vee}(1))$.

On posera

(2.3.4) $\varepsilon(V) = \varepsilon(V,1)$.

Le but du séminaire est de calculer $\varepsilon(V)$. Nous expliquerons plus loin ce qu'on entend par là.

2.4. Généralisation. Observons que $L(\underline{F},T^{-1}) \longrightarrow 1$ quand $T \longrightarrow \infty$, de sorte que (2.2.1) fait apparaître $\varepsilon(V,T)$ comme le monôme asymptotique à $L(V,T)$ quand $T \longrightarrow \infty$. Cela suggère de définir $\varepsilon(\underline{F},T)$, pour un $\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}$-faisceau $\underline{F}$ quelconque, comme le monôme asymptotique à $L(\underline{F},T)$ quand $T \longrightarrow \infty$. Si $\underline{F}$ est lisse(*), en dehors de S , et si $\underline{F}_S$ est le prolongement par zéro de $\underline{F}|X_o - S$, on a

(*) $L(\underline{F},T) = L(\underline{F}_S,T) \prod_{v \in S} \det(1-F_v T^{\deg(v)}, \underline{F}_{\bar{v}})^{-1}$,

où

$$L(\underline{F}_S,T) = \prod_{v \notin S} \det(1-F_v T^{\deg(v)}, \underline{F}_{\bar{v}})^{-1} .$$

Prenant les parties asymptotiques des deux membres, on obtient la formule suivante pour $\varepsilon(\underline{F},T)$:

(2.4.1) $\varepsilon(\underline{F},T) = \varepsilon(\underline{F}_S,T) \prod_{v \in S} \det(1-F_v T^{\deg(v)}, \underline{F}_{\bar{v}})^{-1}$.

2.5. Rappelons maintenant la formule cohomologique de Grothendieck pour ε . Notant encore $\underline{F}$ le faisceau image inverse de $\underline{F}$ sur X , on dispose des groupes de cohomologie ℓ-adique $H^i(X,\underline{F})$, sur lesquels le groupe de Galois $Gal(\mathbb{F}/\mathbb{F}_p)$ agit par transport de structure, et en particulier le Frobenius géométrique $F \in Gal(\mathbb{F}/\mathbb{F}_p)$. La formule de Grothendieck (qui précise (2.2 (i))) est la suivante :

(*) on dira aussi "non ramifié"

$$(2.5.1)\quad L(\underline{F},T) = \prod_i \left(\det(1-FT,H^i(X,\underline{F}))^{-1}\right)^{(-1)^i} \quad . \qquad (^{*})$$

Dans la suite nous utiliserons la convention suivante. Si f est un endomorphisme (de degré zéro) d'un espace vectoriel gradué V$^\cdot$, nous poserons

$$(2.5.2)\qquad \mathrm{Tr}(f,V) = \sum (-1)^i \mathrm{Tr}(f^i) \quad ,$$

$$\det(f) = \prod \det(f,V^i)^{(-1)^i} \quad .$$

Ainsi, avec cette convention, $L(\underline{F},T)$ s'écrit $\det(1-FT,H^{*}(X,\underline{F}))^{-1}$.

Par définition de $\varepsilon(\underline{F},T)$, (2.5.1) entraîne :

$$(2.5.3)\qquad \varepsilon(\underline{F},T) = \varepsilon(\underline{F},1)T^{-\chi(X,\underline{F})} \quad ,$$

avec

$$\varepsilon(\underline{F},1) = \det(-F,H^{*}(X,\underline{F}))^{-1} \quad .$$

2.6. Conjecture. Le problème essentiel qu'on a en vue est de calculer $\varepsilon(\underline{F}\otimes\underline{G})$ en termes de $\varepsilon(\underline{F})$, $\varepsilon(\underline{G})$, et d'informations locales sur $\underline{F}$, $\underline{G}$. Pour énoncer commodément la conjecture que nous avons à ce sujet, nous étendrons, de manière évidente, les définitions de $L(\underline{F},T)$, $\varepsilon(\underline{F},T)$ aux "faisceaux virtuels", i.e. aux éléments du groupe de Grothendieck de la catégorie des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux sur X_o : si $\underline{F} = \sum n_i \underline{F}_i$ est un tel élément (où les $\underline{F}_i$ sont des faisceaux ordinaires), on pose

$$L(\underline{F},T) = \prod L(\underline{F}_i,T)^{n_i} \quad , \quad \varepsilon(\underline{F},T) = \prod (\underline{F}_i,T)^{n_i} \quad .$$

Le produit tensoriel dans la catégorie des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux définit une opération $\otimes$ sur les faisceaux virtuels : si $\underline{F} = \sum m_i \underline{F}_i$ et $\underline{G} = \sum n_j \underline{G}_j$ sont deux faisceaux virtuels, alors $\underline{F}\otimes\underline{G} = \sum m_i n_j\,(\underline{F}_i \otimes \underline{G}_j)$.

Si $\underline{F}$ est un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau virtuel, on définit de manière évidente son rang, une fonction constructible sur X_o , qui en chaque place v, est la dimension de $\underline{F}_{\overline{v}}$ $(= \sum n_i \dim \underline{F}_{i,\overline{v}})$. D'autre part, en chaque place v, on définit la chute totale de $\underline{F}$ en v

$$(2.6.1)\qquad a_v(\underline{F}) = \dim \underline{F}_{\overline{K}} - \dim(\underline{F}_{\overline{v}}) + \mathrm{Sw}_v(\underline{F}_{\overline{K}}) \quad ,$$

où Sw_v est le conducteur de Swan en v (on sait que cet invariant est additif par rapport aux suites exactes, donc passe aux faisceaux virtuels). Cela posé, on peut énoncer :

(*) L'automorphisme F de $H^i(X,\underline{F})$ est aussi le composé de l'homomorphisme image inverse $H^i(X,\underline{F}) \to H^i(X,F^{*}\underline{F})$ (où F est l'endomorphisme de Frobenius de X) et de l'homomorphisme $H^i(X,F^{*}\underline{F}) \to H^i(X,\underline{F})$ donné par l'isomorphisme canonique $F^{*}\underline{F} \to \underline{F}$ ("correspondance de Frobenius").

Conjecture 2.6.2. Soient $\underline{F}$, $\underline{G}$ des faisceaux virtuels de rangs 0 et de chutes totales nulles en toute place, tels que les lieux de ramification de $\underline{F}$, $\underline{G}$ soient disjoints, alors on a

$$\varepsilon(\underline{F} \otimes \underline{G}) = 1 \quad .$$

Cet énoncé est à rapprocher de la formule de Langlands-Weil [1]. Nous pensons pouvoir établir la conjecture dans le cas où $\underline{F}$ et $\underline{G}$ sont modérés.

[1] A. Weil, Dirichlet series and automorphic forms, Lecture Notes in Mathematics n° 189, Springer-Verlag (1971).

(Cette monographie reprend et complète l'article de Weil, Uber die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen, Math. Ann. 168, p. 149-156 (1967)).

EXPOSE II (22 janvier 1980)

0. Additions à l'exposé I .

0.1. Soit $v \in |X_o|$ (notations de (I 1.1)). On a aussi la notion de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau sur Spec($O_v$) , où O_v est l'anneau des entiers du corps local $K_{o,v}$, complété de K_o en v . Du point de vue galoisien, un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau sur Spec($O_v$) consiste en la donnée d'une représentation $\underline{F}_{\overline{\eta}}$ de $\mathrm{Gal}(\overline{K}_v/K_v)$ (où $\overline{K}_v$ est une clôture séparable de K_v) dans un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-vectoriel de dimension finie, d'une représentation $\underline{F}_{\overline{v}}$ de $\mathrm{Gal}(k(\overline{v})/k(v))$ (où $k(\overline{v})/k(v)$ est l'extension résiduelle de $\overline{K}_v/K_v$) dans un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-vectoriel de dimension finie, et d'une flèche de spécialisation $\underline{F}_{\overline{v}} \longrightarrow \underline{F}_{\overline{\eta}}$, équivariante relativement à l'homomorphisme (surjectif) $\mathrm{Gal}(\overline{K}_v/K_v) \longrightarrow \mathrm{Gal}(k(\overline{v})/k(v))$ $(= \hat{\mathbb{Z}})$ (on exige que les représentations soient en fait définies sur des extensions finies de $\mathbb{Q}_\ell$, et soient continues).

Un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau $\underline{F}$ sur X_o fournit un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau $\underline{F}_v$ sur Spec(O_v) pour tout $v \in |X_o|$.

0.2. La constante $\varepsilon(\underline{F}) \overset{\mathrm{dfn}}{=} \varepsilon(\underline{F},1)$ (I 2.4) est multiplicative en $\underline{F}$: si

$$0 \longrightarrow \underline{F}' \longrightarrow \underline{F} \longrightarrow \underline{F}'' \longrightarrow 0$$

est une suite exacte de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux sur X_o , on a

(0.2.1) $\varepsilon(\underline{F}) = \varepsilon(\underline{F}')\,\varepsilon(\underline{F}'')$.

Cela résulte immédiatement de la définition (cf. (I 2.5.3)).

1. Rappels sur la théorie du corps de classes.

1.1. Corps de classes local. Soit K_v un corps local (complet pour une valuation discrète et à corps résiduel $k = k(v)$ fini) (on s'intéresse surtout au cas d'égale caractéristique, i.e. des corps K_v de 0.1, isomorphes au corps de séries formelles à une variable sur un corps fini). Soit $\overline{K}_v$ une clôture séparable de K_v . Le groupe de Galois rendu abélien $\mathrm{Gal}(\overline{K}_v/K_v)^{ab}$ ne dépend que de K_v (si $\overline{K}'_v$ est une autre clôture séparable, on a un isomorphisme entre $\mathrm{Gal}(\overline{K}_v/K_v)$ et $\mathrm{Gal}(\overline{K}'_v/K_v)$ bien défini à un automorphisme intérieur près). La théorie du corps de classes local fournit un isomorphisme canonique

(1.1.1) $\mathrm{Gal}(\overline{K}_v/K_v)^{ab} \xrightarrow{\sim} (K_v^*)^\wedge$,

où $(K_v^*)^\wedge$ est le complété du groupe multiplicatif K_v^* de K_v . Observer que les deux membres de (1.1.1) sont de façon naturelle extensions de $\hat{\mathbb{Z}}$ par un groupe compact. Il est commode d'introduire le <u>groupe de Weil</u> $W(\overline{K}_v/K_v)$, sous-groupe de $\mathrm{Gal}(\overline{K}_v/K_v)$ formé des éléments qui induisent sur $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ (où $\overline{k}/k$ est l'extension résiduelle) une puissance entière du Frobenius. L'isomorphisme (1.1.1) induit un isomorphisme

$$(1.1.2) \qquad W(\overline{K}_v/K_v)^{ab} \xrightarrow{\sim} K_v^{*} ,$$

rendant commutatif le carré

$$(1.1.3) \qquad \begin{array}{ccc} W(\overline{K}_v/K_v)^{ab} & \xrightarrow{(1.1.2)} & K_v^{*} \\ \downarrow & & \downarrow \text{valuation} \\ W(\overline{k}/k) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Z} \end{array} ,$$

où la flèche verticale de gauche est la projection canonique sur le sous-groupe $W(\overline{k}/k)$ de $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ formé des éléments qui sont puissances entières de F, et la flèche horizontale inférieure est l'isomorphisme donné par $F \longmapsto 1$.

1.2. <u>Corps de classes global</u>. Soit K le corps des fonctions d'une courbe X_o propre et lisse, géométriquement connexe, sur un corps fini (corps noté K_o dans (I 1.1)). Introduisons le <u>groupe de Weil</u> global $W(\overline{K}/K)$, sous-groupe de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ (où $\overline{K}$ est une clôture séparable de K) formé des éléments qui induisent une puissance entière de Frobenius sur $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{F}_q)$ $(= \hat{\mathbb{Z}})$. Soit $\underline{A}$ l'anneau des adèles de K (produit restreint de la famille des K_v, $v \in |X_o|$), qui contient K plongé diagonalement. La théorie du corps de classes global affirme qu'on a un isomorphisme canonique

$$(1.2.1) \qquad W(\overline{K}/K)^{ab} \xrightarrow{\sim} \underline{A}^{*}/K^{*}$$

(le groupe $\underline{A}^{*}/K^{*}$ est le groupe des classes d'idèles). L'isomorphisme (1.2.1) est compatible aux isomorphismes locaux (1.1.1) dans le sens suivant. Soit $v \in |X_o|$, plongeons $\overline{K}_v$ dans $\overline{K}$, de sorte que $\mathrm{Gal}(\overline{K}_v/K_v)$ s'identifie au groupe de décomposition du prolongement correspondant de la place v. On a donc une injection $\mathrm{Gal}(\overline{K}_v/K_v)$ dans $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$, d'où une flèche de $\mathrm{Gal}(\overline{K}_v/K_v)^{ab}$ dans $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)^{ab}$, qui ne dépend plus du plongement choisi, et induit une flèche canonique

$$(1.2.2) \qquad W(\overline{K}_v/K_v)^{ab} \longrightarrow W(\overline{K}/K)^{ab} .$$

Cela posé, on a un carré commutatif

(1.2.3)
$$\begin{tikzcd} W(\overline{K}_v/K_v)^{ab} \arrow[r, "(1.1.2)"] \arrow[d, "(1.2.2)"'] & K_v^* \arrow[d] \\ W(\overline{K}/K)^{ab} \arrow[r, "(1.2.1)"] & \underline{A}^*/K^* \end{tikzcd},$$

où la flèche verticale de droite envoie 1 sur l'idèle qui vaut 1 en v et 0 ailleurs.

2. <u>Existence de constantes locales et formule conjecturale pour</u> ε .

On démontre dans [1] le résultat suivant :

<u>Théorème</u> 2.1. Il existe une et une seule construction associant à un quadruplet $(K_v,\underline{F},\psi,dx)$ (où K_v est un corps local comme en 0.1, $\underline{F}$ un $\overline{\mathbb{Q}}_l$-faisceau (*) sur $\mathrm{Spec}(O_v)$, ψ un caractère additif non trivial de K_v à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_l^*$, et dx une mesure de Haar sur K_v (considérée comme à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$)) une "constante locale"

(2.1.0) $\qquad \varepsilon(\underline{F},\psi,dx) \in \overline{\mathbb{Q}}_l^*$

de manière que les conditions 2.1.1 à 2.1.4 ci-après soient satisfaites :

2.1.1. $\quad \varepsilon(\underline{F},\psi,dx)$ est multiplicatif en $\underline{F}$, i.e. si

$$0 \longrightarrow \underline{F}' \longrightarrow \underline{F} \longrightarrow \underline{F}'' \longrightarrow 0$$

est une suite exacte de $\overline{\mathbb{Q}}_l$-faisceaux sur $\mathrm{Spec}(O_v)$, on a

$$\varepsilon(\underline{F},\psi,dx) = \varepsilon(\underline{F}',\psi,dx)\varepsilon(\underline{F}'',\psi,dx).$$

(<u>Commentaire</u> : cette condition entraîne des simplifications de deux sortes :

a) Tout faisceau $\underline{F}$ s'écrit comme extension

$$0 \longrightarrow j_!j^*\underline{F} \longrightarrow \underline{F} \longrightarrow i_*i^*\underline{F} \longrightarrow 0 \quad ,$$

où i (resp. j) est l'inclusion du point fermé s (resp. du point générique η) de $\mathrm{Spec}(O_v)$ (en termes galoisiens, c'est la suite exacte évidente

$$0 \longrightarrow (\underline{F}_{\overline{\eta}},0) \longrightarrow (\underline{F}_{\overline{\eta}},\underline{F}_{\overline{s}}) \longrightarrow (0,\underline{F}_{\overline{s}}) \longrightarrow 0 \quad),$$

de sorte que ε est déterminé par ses valeurs sur les $\underline{F}$ concentrés sur η ou sur s .

b) Pour un faisceau $\underline{F}$ concentré sur η $(= \underline{F}_{\overline{\eta}})$, le seul cas intéressant est celui où la représentation correspondante de $\mathrm{Gal}(\overline{K}_v/K_v)$ est semi-simple : en effet, si $\underline{F}^{ss}$ est la représentation semi-simplifiée de $\underline{F}$ (donnée par les quotients d'une suite de Jordan-Hölder), on a $\varepsilon(\underline{F},\psi,dx) = \varepsilon(\underline{F}^{ss},\psi,dx)$.

(*) plus généralement, un faisceau de Weil, cf. commentaire ci-dessous.

Dans le cas d'une représentation semi-simple, il résulte du théorème de monodromie local que le sous-groupe d'inertie I agit alors sur $\underline{F}$ (= $\underline{F}_{\overline{\eta}}$) à travers un groupe fini. Dès lors, si au lieu de travailler avec des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux on travaille avec des faisceaux de Weil (définis comme les $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux, mais avec Gal remplacé par W), la topologie de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ n'apparaît plus, car le groupe qui opère est un quotient de $W(\overline{K}_v/K_v)$, extension de $\mathbb{Z}$ par un groupe fini (quotient de I).

2.1.2. Si $\underline{F}$ est concentré sur s ($\underline{F} = (0,\underline{F}_s)$) ,

$$\varepsilon(\underline{F},\psi,dx) = \det(-F,\underline{F}_{\overline{s}})^{-1} .$$

2.1.3. Soit $\underline{F}$ le faisceau $j_*\underline{F}_{\overline{\eta}}$, où $\underline{F}_{\overline{\eta}}$ est donné par un caractère $\chi : W(\overline{K}_v/K_v) \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^*$. Alors, pour toute fonction f sur K_v , localement constante et à support compact, on a la formule suivante (dont les termes seront définis ci-dessous) :

$$(2.1.3.1) \qquad L(\chi')^{-1} \int f^\wedge(x)\chi'(x)d^*x = \varepsilon(\underline{F},\psi,dx)L(\chi)^{-1}\int f(x)\chi(x)d^*x \; .$$

Dans cette formule :(i) χ se factorise à travers $W(\overline{K}_v/K_v)^{ab}$, donc par la théorie du corps de classes local (1.1.2) peut être considéré comme un homomorphisme de K_v^* dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell^*$, ce qui donne un sens à $\chi(x)$.

(ii) $$L(\chi) = \begin{cases} 1 \text{ si } \chi \text{ est ramifié (i.e. non trivial sur } O_v^*) \\ (1-\chi(\pi))^{-1} \text{ sinon } (\pi = \text{une uniformisante}) \end{cases} .$$

(iii) χ' désigne le caractère $x \longmapsto |x|\chi(x)^{-1}$ (de K_v^* dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell^*$) (Cela correspond moralement au changement de s en 1-s).

(iv) $f^\wedge$ désigne la transformée de Fourier de f , définie par l'intégrale (en fait une somme finie)

$$f^\wedge(y) = \int f(x)\psi(xy)dx$$

(observer l'absence de signe, un peu inhabituelle).

(v) Le symbole d^*x , aux deux membres de (2.1.3.1), désigne la (même) mesure de Haar sur le groupe multiplicatif K_v^* .

(vi) Les intégrales aux deux membres de (2.1.3.1) n'ont a priori pas de sens. On peut leur en donner un par l'un des deux procédés suivants : a) ne considérer que les fonctions f sur K_v (localement constantes et à support compact) telles que $f(0) = f^{\wedge}(0) = 0$: les intégrales sont alors des sommes finies, et la condition 2.1.3, ainsi reformulée, permet encore la validité du théorème. b) Un autre procédé, moins brutal, consiste à observer que, si les intégrales ont un sens, on doit avoir

$$\int f(x)\chi(x)d^{*}x = \int f(xy)\chi(xy)d^{*}x = \chi(y)\int f(xy)\chi(x)d^{*}x \quad ,$$

donc

$$\int (f(x) - f(xy))\,\chi(x)d^{*}x = (1-\chi(y)^{-1})\int f(x)\chi(x)d^{*}x \quad .$$

Or $g(x) = f(x) - f(xy)$ vérifie $g(0) = 0$, donc on peut définir l'intégrale (a priori non convergente) $\int f(x)\chi(x)d^{*}x$ comme

$$(1-\chi(y)^{-1})^{-1}\int (f(x) - f(xy))\chi(x)d^{*}x \quad ,$$

pour y choisi tel que $\chi(y) \neq 1$. Si χ est trivial, l'équation (*), pour $y = \pi$ ou π^{-1} , permet encore de donner un sens aux deux membres de (2.1.3.1). On peut aussi, pour χ trivial, remplacer les équations (2.1.3.1) par la normalisation suivante : si la masse totale de O_v pour la mesure dx est 1, si ψ est trivial sur O_v mais pas sur m_v^{-1} (où m_v est l'idéal maximal), alors $\varepsilon(\underline{F},\psi,dx) = 1$.

D'après la thèse de Tate [13], pour ψ, dx, χ fixés, il existe un unique $\varepsilon(\underline{F},\psi,dx)$ tel que la formule (2.1.3.1) soit valable pour toute fonction f sur K_v (localement constante et à support compact) (une fois qu'on lui a donné un sens !).

2.1.4. Pour tout $a \in \overline{\mathbb{Q}}_{\ell}^{*}$, $\varepsilon(\underline{F},\psi,adx) = a^{\dim \underline{F}_{\bar\eta}}\,\varepsilon(\underline{F},\psi,dx)$.

2.1.5. Soit K'_v/K_v une extension finie séparable de corps locaux, d'où un morphisme $\phi : \mathrm{Spec}(O'_v) \longrightarrow \mathrm{Spec}(O_v)$. Pour tout caractère additif (non trivial) ψ de K_v , pour tout faisceau virtuel $\underline{F}$ de rang 0 sur $\mathrm{Spec}(O'_v)$, alors

(2.1.4.1) $\quad \varepsilon(\underline{F},\psi\circ \mathrm{Tr}_{K'_v/K_v}) = \varepsilon(\phi_{*}\underline{F},\psi)$.

(<u>Commentaire</u> : 1) "virtuel" signifie "élément du groupe de Grothendieck correspondant (i.e. des faisceaux de Weil)". 2) Pour $\underline{F}$ virtuel de rang 0, il résulte de 2.1.4 que $\varepsilon(\underline{F},\psi,dx)$ ne dépend pas du choix de la mesure de Haar dx, c'est pourquoi on ne l'a pas précisé dans (2.1.4.1) : en fait, pour dx donné sur K_v , il n'y a pas de choix canonique d'un dx correspondant sur K'_v .)

<u>Remarque</u> 2.2. Dans [1] , 2.1 est énoncé sous une forme légérement différente : au lieu de faisceaux de Weil, il s'agit de représentations du groupe de Weil. Compte tenu de 2.1.1 et 2.1.2, la différence est bien sûr inessentielle. Pour faciliter la traduction, indiquons les correspondances :

(2.2.1) $\varepsilon(V,\psi,dx)$ (au sens de [1]) = $\varepsilon(j_* V,\psi,dx)$

(pour V tel que l'inertie agisse à travers un groupe fini) ,

(2.2.2) $\varepsilon_0(V,\psi,dx)$ (au sens de [1]) = $\varepsilon(j_! V,\psi,dx)$.

NB. Prendre garde que ε_0 commute à la "réduction mod ℓ" , pas ε .

<u>Conjecture</u> 2.3. Soient X_0 une courbe propre et lisse sur $\mathbb{F}_p$, connexe, $\underline{K}$ son corps des fonctions, $\underline{A}$ l'anneau des adèles de K , $\psi : \underline{A}/K \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^*$ un caractère additif non trivial, dx une mesure de Haar sur $\underline{A}/K$ de volume total 1, d'où une mesure de Haar, notée encore dx, sur $\underline{A}$. On choisit une décomposition $dx = \prod_v dx_v$, où les dx_v sur K_v donnent presque toutes la masse 1 à O_v . Pour toute place v, on note $\psi_v : K_v \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^*$ le caractère défini par ψ . Alors, pour tout $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau $\underline{F}$ sur X_0 , on a

(2.3.1) $\varepsilon(\underline{F}) = \prod_v \varepsilon_v(\underline{F},\psi_v,dx_v)$,

où $\varepsilon(\underline{F})$ est la constante définie en (I 2.4) et $\varepsilon_v(\ \ )$ la constante locale en v définie en 2.1 .

<u>Remarque</u> 2.4. On vérifie facilement que le second membre de (2.3.1) ne dépend pas : 1) du choix de la décomposition $dx = \prod_v dx_v$: en effet, d'après 2.1.4, changer dx_v en $a_v dx_v$ change ε_v en $a_v^{\dim \underline{F}_{\bar\eta}}\varepsilon_v$, mais $\prod a_v = 1$ car dx est de volume total 1 ; 2) du choix du caractère additif ψ : on sait en effet que, si ψ' est un autre caractère additif, il existe $\lambda \in K^*$ tel que $\psi'(x) = \psi(\lambda x)$ (utiliser le fait que le dual de Pontrjagin de $\underline{A}/K$ est K). L'unicité des constantes locales entraîne aisément que, pour tout v,

$$\varepsilon_v(\underline{F},\psi(\lambda\ -),dx) = \varepsilon_v(\underline{F},\psi,dx).(\det \underline{F}_{\bar\eta})(\lambda_v).|\lambda|_v^{-\dim \underline{F}_{\bar\eta}}$$

(où $\det \underline{F}_{\bar\eta}$ est considéré, grâce au corps de classes local, comme un caractère de K_v^*). Il s'agit donc de voir que l'on a

$$\prod_v \det(\underline{F}_{\eta})(\lambda_v)(\prod_v |\lambda|_v)^{-\dim(\underline{F}_{\eta})} = 1 \quad .$$

Or

$$\prod_v \lambda_v = 1 \quad ,$$

par la formule du produit, et

$$\prod_v \det(\underline{F}_{\eta})(\lambda_v) = 1 \quad ,$$

car $\det(\underline{F}_{\eta})$ est un caractère de $\underline{A}^{*}/K^{*}$ (= caractère de $\underline{A}^{*}$ trivial sur K^{*}) .

[1] P. Deligne, Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L , Modular functions in one variable II, Lecture Notes in Mathematics n° 349, Springer-Verlag (1973).

[2] J. Tate, Fourier Analysis in Number Fields and Hecke's Zeta-Functions, in Algebraic Number Theory, edited by Cassels-Fröhlich, Academic Press (1967).

Voir aussi

[3] J. Tate, Local constants. in : Algebraic number fields, Acad. press 1977 (Durham conference).

pour un exposé introductif à [1] .