Paris, le 22 février 1983

Cher Grothendieck,

Je voudrais d'abord te remercier de ta très gentille lettre du 8 janvier et de ta longue lettre mathématique du 22. Les questions que tu poses m'intéressent et j'aimerais tenter d'y répondre, mais pour cela il faudrait que je puisse y réfléchir tranquillement, ce qui n'a pas été le cas jusqu'ici. Je doute en fait de trouver le temps d'y penser d'ici les grandes vacances, car je me suis laissé bêtement asphyxier par des obligations incompressibles (enseignement, exposés de séminaire).

En deux mots, je voudrais quand même te dire que la difficulté sur laquelle tu es tombé au début de ta lettre ($\varprojlim$ vs $\int$) m'avait considérablement gêné dans ma thèse quand j'avais dû, dans mes histoires de déformations de diagrammes, comparer des cohomologies de topos du type BG et Nerf(G), pour G un groupe voire un groupoïde. Au fond, si je m'en étais tiré, c'est que la condition d'acylicité que tu as dégagée devait être vérifiée, mais il faudrait que j'aille y regarder de plus près. Au mois d'août dernier, j'avais un peu réfléchi à des questions voisines, suggérées par les travaux de Deligne et McPherson sur le "complexe d'intersection". Je ne vais pas essayer de te faire un cours là-dessus, mais je te dirai simplement que sur un espace (disons algébrique complexe) singulier, c'est un complexe intermédiaire en quelque sorte entre le faisceau constant $\mathbb{C}$ et le complexe dualisant, et qui est auto-dual : il s'obtient en prenant $\mathbb{C}$ sur l'ouvert de lissité $j : U \to X$, puis $\tau_{\le 1} Rj_*\mathbb{C}$ sur X - (le lieu singulier de X-U), etc. en appliquant successivement des images directes et des troncations. Ce que je voulais comprendre, c'était comment ce complexe peut se "lire" sur une désingularisation simpliciale $X. \to X$ de X (on espère, pour des raisons qui viennent de la car. p , qu'il y a une structure de Hodge naturelle sur la cohomologie de ce complexe, et je voulais faire le raccord avec le point de vue de Deligne des structures de Hodge mixtes). La première question sur laquelle j'étais tombé était : est-il possible d'étendre la dualité (au sens de toi et Verdier) pour les coefficients discrets (sur les schémas séparés de type fini /C disons) aux schémas simpliciaux (à composantes séparées de t. f. /C). Naturellement, j'ai regardé le topos, que tu appelles intégral, d'un schéma simplicial X. (et que sauf erreur je notais Top(X.)) dans ma thèse, vol. II), et essayé de définir des foncteurs $f^!$ pour $f : X. \to Y.$. Je dois dire que j'ai pour l'instant complètement échoué, faute sans doute d'intuition suffisante sur la stratification "définie par les étages X_n " (et aussi sur . . . le lien entre le topos Top(X.) et la "réalisation géométrique" au sens habituel de l'espace simplicial X.). Il doit sûrement y avoir une théorie, mais le bon point de vue, suffisamment souple et général, n'est pas facile à trouver (compte tenu notamment de la variété des topos qu'on peut fabriquer à partir d'une famille (X_i) : outre $\varprojlim$ et Top , il y a le topos que je notais Top° dans ma thèse (qui est défini quand les f_{ij}^* ont des adjoints à gauche), et les topos "évanescents" à la Deligne, dont un cas particulier était apparu dans SGA 4 avec la question de recollement d'un ouvert et d'un fermé).

J'aimerais naturellement connaître les motivations qui t'ont amené aux questions que tu poses (cf. ton allusion au dévissage du topos de Deligne-Mumford).

Pardonne-moi cette non-réponse. J'espère t'écrire "plus tard" une lettre non vide.

Bien à toi,

Luc