1

Villecun le 5.2.1975

Cher Breen,

Merci pour ta longue lettre, reçue il y a déjà un moment, et excuse stp le retard pour répondre. Je dois avouer que toute cette lettre m'a passé par dessus la tête - elle était écrite pour quelqu'un plus "dansle coup" que je ne le suis - surtout maintenant où je ne réfléchis plus au maths que quelques jours par mois, à la sauvette. Ton scepticisme concernant la soi-disant suite exacte de ma lettre à Deligne était fondé, et ton interprétation cohomologique de mon invariant comme un $\mathrm{Ext}^2(X(M),N)$ certainement correcte. Je m'étais convaincu par voie géométrique qu'il y avait un homomorphisme d'obstruction $\mathrm{Hom}(M,{}_2N) \to \mathrm{Ext}^3(M,N)$, mais en me ramenant au cas "universel" ($M=N={}_2N$ = faisceau en $\underline{F}_2$-modules "universel"), ce qui était correct, j'avais par un calcul complètement canulé cru conclure que dans un tel cas universel, on a en fait $\mathrm{Ext}^i(M,N)=0$ pour $i \geq 1$. Je me rappelle que j'avais été intrigué d'un résultat aussi fort - et même la soi-disant suite exacte de ma lettre à Deligne continuait à me sembler un peu suspecte - je suis content que ce malaise soit dissipé. - Pour tout le reste de ta lettre, elle mériterait un lecteur plus averti, aussi, pour qu'elle ne soit pas entièrement perdue au monde, je vais l'envoyer à Illusie! J'ai néanmoins constaté, avec intérêt, ton intérêt à demi réfoulé pour des 2-catégories de Picard, n-catégories et autre faune de ce genre, et ton espoir que je te prouverai peut-être que ces animaux sont tout à fait indispensables pour faire des maths sérieuses dans telle ou telle circonstance. J'ai bien peur que cet espoir ne soit déçu, je crois que jusqu'à maintenant on a toujours pu s'en tirer en éludant de tels objets et l'engrenage dans lequel ils pourraient nous entrainer. Est-ce nécessairement une raison pour continuer à les éluder ? Les situations où on a l'impression"d'éluder" en effet me semblent en tous cas devenir toujours plus nombreuses - et si on s'abstenait de tirer une situation complexe et chargée de mystère au clair, chaque fois qu'on ne serait pas <u>forcé</u> de le faire pour des raisons techniques provenant de la math déjà faite, - il y aurait sans doute beaucoup de parties des maths aujourd'hui reputées"sérieuses" qui n'auraient jamais été développées (Il n'est pas dit non plus que le monde s'en trouverait plus mal ...). Ton commentaire (que j'ai également entendu chez Deligne) que la classification d'objets géométriques relativement merdiques se réduit finalement à des invariants cohomologiques essentiellement "bien connus" et relativement simples n'est pas non plus convainquant; n'est ce pas négliger la différence entre la compréhension d'un objet géométrique, et la détermination de sa "classe à isomorphisme (ou équivalence...) près" ?

Tu me demandes des exemples "convainquants" de 2-catégories de Picard. Voici quelques ~~uns~~ exemples, en vrac (je ne sais s'ils seront convainquants !) :

1) Si L est un lien de centre Z sur le topos X, les gerbes liées par Z forment une 2-catégorie de Picard stricte, représentée par le complexe $R\Gamma_X(Z)$ tronqué en degré 2, dont les objets de cohomologie non triviaux sont les $H^i(X,Z)$, $0 \leq i \leq 2$. Les gerbes liées par L forment un pseudo-2-torseur sous la gerbe précédente, qui est un 2-torseur (i.e. non vide) sss une certaine obstruction dans $H^3(X,Z)$ est nulle. Pour comprendre cette classe de notre point de vue, il y a lieu de passer aux 2-champs correspondants: le 2-champ de Picard strict des Z-gerbes sur des objets variables de X, et le 2-champ des L-gerbes sur des objets variables. Ce dernier est bel et bien un 2-torseur sous le champ précédent, or la classification de ces ~~deux~~ 2-torseurs (à 2-équivalence près) se fait par le $H^3(X,Z)$, ~~de façon précise~~ (tout comme les Z-1-gerbes peuvent être interpétées comme des torseurs sous la Z-1-champ de Picard strict des Z-torseurs, et sont ~~par conséquent~~ classifiées par le $H^2(X,Z)$). On voit déjà, bien sûr, poindre ici l'oreille de la 3-catégorie de Picard stricte des 2-gerbes liées par Z, ou (de façon équivalente) des 2-torseurs sous le 2-champ de Pic ard strict des Z-1-gerbes; cette 3-catégorie de Picard stricte étant décrite par $R\Gamma_X(Z)$ tronqué en dimension 3, ayant comme invariants de cohomologie non triviaux les $H^i(X,Z)$ $(0 \leq i \leq 3)$. Quant au 3-vhamp de Picard correspondaht, il est décrit par une résolution injective de Z tronquée en degré 3, alors que le 2-champ de Picard précédent se décrivait en tronquant en degré 2.

2. Si M et N sont deux faisceaux abéliens sur X, les champs de Picard (NB: 1-champs !) d'invariants M et N forment eux-même une 2-catégorie de Picard stricte, représentée sans doute par le complexe RHom(X(M),N) tronqué en ~~dimension~~ degré 2, dont les invariants de chomologie non triviaux sont donc le drôle de Ext^2 de ma lettre à Deligne, et les Honnètes $Ext^i(M,N)$ $(0 \leq i \leq 1)$. Les champs de Picard stricts forment une sous-2-caté gorie de Picard pleine, représentée par RHom(M,N) tronqué en degré 2, d'invariants les $Ext^i(M;N)$ $(0 \leq i \leq 2)$. Bien sûr, Ext^2 donne les 0-objets à équivalence près, Ext^1 les automorphismes à isomorphisme près de l'objet nul, Ext^0 les automorphismes de l'automorphisme identique audit ... Je n'ai pas réfléchi à une bonne interprétation géométrique de la n-catégorie de Picard associée à RHom(M,N) tronqué en degré n, et encore moins bien sûr pour RHom(X(M),N), mais sans doute il faut regarder dans la direction des n-champs de Picard.

3. Soit G un Groupe sur X, opérant sur un faisceau abélien N. Les champs en (Gr)-catégories sur X liés par (G,N) forment une 2-catégorie de Picard,

dont les invariants sont $H^3(B_G \bmod X,N)$, $H^2(B_G \bmod X,N)$, et $Z^1(G,N)$ (groupe des 1-cocyles de G à coéfficients dans N)- je te laisse le soin de deviner quel est le complexe tronqué qui le décrit ! J'ai écrit il y a quelques mois à Deligne à ce sujet, et l'ai prié de t'envoyer une copie de ~~xxenvoyer~~ la lettre.

4) Soit X un topos localement annelé, on peut considérer les Algèbres d'Azumaya sur X (i.e. les Algèbres localement isomorphes à une alg. de matrices d'ordre n, $n \geq 1$) comme les objets d'une 2-catégorie de Picard, où la catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}(A,B)$, pour A et B des Algèbres d'Azumaya, est la catégorie des "trivialisations" de $A^o \otimes B$, i.e. des couples (E,ϕ), E un Module localement libre et ϕ un isomorphisme $\underline{\mathrm{End}}(E) \simeq A^o \otimes B$. Il faut travailler un peu pour définir les accouplements $\underline{\mathrm{Hom}}(A,B) \times \underline{\mathrm{Hom}}(B,C) \rightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(A,C)$; l'opération $\otimes$ dans la 2-catégorie de Picard à construire est bien sûr le produit tensoriel d'Algèbres, et l'opération "puissance -1" est le passage à l'algèbre opposée. On vérifie ~~passant aux champs correspondants, qu'en à~~ qu'en associant à toute Algèbre d'Azumaya la 1-gerbe de ses trivialisations, on trouve un 2-$\otimes$-foncteur de la 2-catégorie de Picard (dite "de Brauer") dans celle des 1-gerbes liées par $\underline{G}_m$, qui est 2-fidèle. Les invariants de la première sont donc les groupes $H^2(X,\underline{G}_m)_{Br}$, $H^1(X,\underline{G}_m)$ et $H^0(X,\underline{G}_m)$, où dans le premier terme l'indice Br désigne le sous-groupe du H^2 formé des classes de cohomologie provenant d'Algèbres d'Azumaya. On aurait envie de parler du 2-champ de Picard des Algèbres d'Azumaya sur des objets variables de X, mais c'est bien une 2-catégorie de Picard fibrée sur X, mais pas tout à fait un 2-champ (whatever that means), sans doute - la condition de 2-recollement (whatever that means) ne doit pas être satisfaite - sinon il n'y aurait pas d'indice Br au H^2 ...

La considération des n-catégories de Picard strictes (qui s'imposent à nous pas à pas dans un contexte essentiellement "commutatif) me semblent la clef du passage de l'algèbre homologique ordinaire ("commutative"), en termes de complexes, à une algèbre homologique non commutative, du fait qu'elles donnent une interprétation géométrique correcte des "complexes tronqués à l'ordre n" (en tant que objets de catégories dérivées), donc, essentiellement (par passage à la limite sur n) des complexes tout courts. L'idée naive qui se présente est alors que les "complexes non commutatifs" (qui seraient les objets-fantômes d'une algèbre homologique non commutative) sont peut-être ce qui reste des n-catégories de Picard (strictes) quand on oublie leur caractère additif, i.e. leur structure de Picard - c'est à dire qu'on ne retient que la n-catégorie ! (Quand on se place sur un topos X, on s'intéresse donc aux n-champs sur X...) A vrai dire, cette idée est venue d'abord d'une autre direction, quand il s'est agi en géométrie algébrique de démontrer des ~~formules~~ théorèmes de Lefschetz à coéfficients discrets en cohomologie étale, dans le cas d'une variété projective disons et de toute section hyperplane, ou d'une variété quasi-projective et de presque toute section hyperplane (pour ne mentionner que le cas global le plus simple), sous les hypothèses de profondeur cohomologiques "les plus naturelles" (en fait, essentiellement des conditions néc. et suff. de validité dudit théorème). Dans le cas commutatif, les techniques de dualité nous suggèrent très clairement quels sont les meilleurs énoncés possibles, cf. l'exposé de Mme Raynaud dans SGA 2. Mais ces techniques ne valent qu'en se restreignant à des coéfficients premiers aux caractéristiques, alors que des démonstrations directes plus géométriques (développées dans SGA 2 avant le développement du formalisme de la cohomologie étale) donnaient des résultats très voisins pour le H^0 et le H^1 (ou le π_1, si on préfère) sans telles restrictions, du moins dans le cas propre (i.e. projectif, au lieu de quasi-projectif). En fait, ce sont ~~en fait~~ les "résultats les meilleurs possibles" eux-mêmes, énoncés comme conjectures dans SGA 2 dans l'exposé cité de Mme Raynaud, qui sont démontrés ultérieurement par elle dans sa thèse. Ce qui est remarquable de notre point de vue, c'est que les énoncés les plus forts se présentent le plus naturellement sous forme d'énoncés sur des 1-champs sur le site étale de la variété algébrique considérée - la notion de "profondeur $\geq$ i" (pour i=1,2,3) s'énonçant aussi le plus naturellement en termes de champs. Non seulement cela, mais alors même qu'on voudrait ignorer la notion technique de champ et travailler exclusivement en termes de H^0 et H^1 en utilisant à bloc le formalisme cohomologique non commutatif de Giraud, pour démontrer disons un théorème de bijectivité $\pi_1(Y) \rightarrow \pi_1(X)$ (ce qui est le résultat le plus profond établi dans la thèse de Mme Raynaud), il semble bien qu'on n'y arrive pas, faute à ce formalisme d'avoir la souplesse nécessaire. En fait, il faut utiliser comme ingrédients techniques, de façon essentielle les trois théorèmes suivants directement pour les 1-champs "de torsion" (i.e. où les faisceaux en groupes d'automorphismes sont de ind-torsion): a) théorème de changement de base pour un morphisme propre, b) théorème de changement de base par un morphisme lisse c) théorème de "propreté cohomologique générique" pour un morphisme de type fini f: X $\rightarrow$ S, S intègre (disant que l'on peut trouver dans S un ouvert U$\neq\emptyset$ tel que pour <u>tout</u> changement de base S' $\rightarrow$ S se factorisant par u, la formule de changement de base est vraie). (Pour b) et c), il faut faire des hypothèses que les faisceaux d'automorphismes sont premiers aux caractérisitques, et dans c) une hypothèse de constructtibilité sur ces faisceaux - mais b) et c) ne servent que dans la version "générique" du th. de Lefschetz.) C'est avec en vue de telles applications que Giraud a pris la peine dans son bouquin (si je ne me trompe) de demontrer a), b) (et c) ?) dans le contexte des 1-champs et de leurs images directes et inverses. Mais du même coup il devient clair que le contexte "naturel" des théorèmes de changement de base en cohomologie étale, des théorèmes ~~de~~ du type Lefschetz (dits "faibles") sur les "sections hyperplanes", tout comme de ~~la~~ la notion de profondeur qui y joue un rôle crucial, ~~doit~~ être celui des n-champs. Et que le développement hypothétique de ce contexte, ne risque pas de se réduire à une jonglerie purement formelle et absolument bordélique avec du "general nonsense", mais qu'on se trouvera aussitôt confronté à des tests "d'utilisabilité" aussi sérieux que la démonstration des théorèmes de changement de base et ceux du type de Lefschetz (qui même dans le contexte commutatif ne sont pas piqués de vers ...). Idem pour variétés analytiques complexes etc.

Je ne sais si ces commentaires te "passent par dessus la tête" à ton tour, ni si elles te donnent l'impression qu'il y aurait peut-être des choses intéressantes à tirer au clair. Si cela t'intéresse, je pourrais expliciter sous forme un peu plus systématique quelques ingrédients d'une hypothétique algèbre homologique non commutative et les liens de celle-ci à l'algèbre homologique commutative. Plus mystérieux pour moi (et pour cause, vu mon ignorance en homotopie) seraient les relations entre celle-là et l'algèbre homotopique, i.e. les structures semi-simpliciales, et je n'ai que des commentaires assez vagues à faire en ce sens (*). Par ailleurs, je te rappelle que même l'algèbre homologique ~~xxx~~ commutative n'est pas, il s'en faut, dans un état satisfaisant, pour autant que je sache, vu qu'on ne sait toujours pas quelle est la "bonne" notion de catégorie triangulée. Or il me semble bien clair que ce n'est pas une question purement académique - même si on a pu se passer de le savoir jusqu'ici (en se bornant comme Monsieur Jourdain à "faire de la prose sans le savoir" - en travaillant sur des catégories de complexes, éventuellement filtrés, sans trop se demander quelles structures il y a sur ces catégories ...).

Bien cordialement à toi

A Grothendieck

(*) P.S. Réflexion faite, j'ai quand même envie de te mettre un peu en appétit, en faisant ces "quelques commentaires assez vagues". Il s'agit du yoga qu'une (essentiellement petite) n-catégorie (à n-équivalence près" en groupoïdes) est essentiellement la même chose" qu'un ensemble semi-simplicial pris à homotopie près et où on néglige les π_i pour $i \geq n+1$ (où, si tu préfères, "où on a tué les groupes d'homotopie en dimension $\geq n+1$"). Voici des éléments heuristiques pour ce yoga. Si $K.$ est un ensemble simplicial (il peut être prudent de le prendre de Kan) on lui associe une n-catégorie ~~xx~~ $C_n(K.)$, dont les 0-objets sont les

0-simplexes, les 1-objets sont les chemins (ou homotopies) entre 0-simplexes, les 2-objets sont les homotopies entre chemins (à extrémités fixées) etc. Pour les n-objets, cependant, on ne prend pas les homotopies entre homotopies de fourbis, mais classes d'équivalence d'homotopies (modulo la relation d'homotopie) entre homotopies. La composition des i-objets ($i \geq 1$) se définit de façon évidente, on notera qu'elle n'est pas strictement associative, mais associative modulo homotopie. Donc la n-catégorie qu'on obtient n'est pas "stricte" - et on prévoit pas mal d'emmerdement pour définir de façon raisonnable une n-catégorie pas stricte (dans la description des compatibilités pour les "données d'associativité"). La mise sur pied du yoga qui suit pourrait constituer un fil d'ariane pour la définition en forme des n-catégories (pas strictes), les n-foncteurs entre elles (pas non plus stricts, et pour cause), les n-équivalences etc, au même titre que le yoga initial "une n-catégorie est une catégorie ou les Hom et leurs accouplements de composition ~~sont des~~ (n-1)-catégories et des accouplements entre telles". Cette n-catégorie $C_n(K.)$ dépend fonctoriellement de K. , tout morphisme simplicial $K. \rightarrow K!$ définit un n-foncteur $C_n(K.) \rightarrow C_n(K!)$; en fait, cela doit en dépendre même n-fonctoriellement, vu qu'on voit (en s'inspirant de ce qui précède et l'appliquant à des ensembles semi-simpliciaux de la forme Hom.(K.,K!)) que les ensembles semi-simpliciaux forment eux-mêmes les 0-objets d'une n-catégorie, quel que soit N ...

En fait, $C_n(K.)$ est un n-groupoïde, i.e. une n-catégorie où toute i-flèche ($1 \leq i \leq n$) (= i-objet) est une "équivalence" i.e. admet un quasi-inverse (donc un inverse si la n-catégorie est "réduite"). Si C est une telle n-catégorie i.e. un n-groupoïde, et x un 0-objet de C, il s'impose de désigner par $\pi_n(C,x)$ ($0 \leq i \leq n$) successivement: l'ensemble des classes de 0-objets à équivalence près (c'est un vulgaire ensemble), l'ensemble des classes à équivalence près de 1-objets (ou 1-flèches) $x \rightarrow x$ (c'est un groupe, pas nécessairement commutatif), l'ensemble des classes mod équivalence des ~~2-flèches~~ $1_x \rightarrow 1_x$, où 1_x est la 1-flèche identique de x (c'est un groupe commutatif $\pi_2(C,x)$, ainsi que les groupes qui vont suivre), l'ensemble des classes mod équivalence de 3-flèches $1_{1_x} \rightarrow 1_{1_x}$, etc. Ces groupes forment, comme de juste, des "systèmes locaux" sur l'ensemble des 0-objets de C, et modulo le grain de sel habituel, les $\pi_i(C,x)$ ne dépendent que de la "composante connexe" du 0-objet x i.e. de sa classe modulo équivalence de 0-objets. Ceci dit, si C est de la forme $C_n(K.)$, il résulte pratiquement des définitions que l'on a des isomorphismes canoniques $\pi_i(K.,x) \simeq \pi_i(C_n(K.))$ pour $0 \leq i \leq n$, qui pour x variable peuvent s'interpréter comme des isomorphismes de systèmes locaux. Il s'ensuit que pour une application semi-simpliciale $K. \rightarrow K.'$, le n-foncteur correspondant $C_n(K.) \rightarrow C_n(K.')$ est une n-équivalence sss f induit un isomorphisme sur les π_0 et sur les π_i en tout point ($1 \leq i \leq n$). On serait plus heureux de pouvoir dire à la place "et ~~un~~ de plus homomorphisme surjectif pour $i=n+1$", car c'est, il me semble, cela qu'il faudrait pour ~~pouvoir~~ espérer conclure que la catégorie localisée de la catégorie des ensembles semi-simpliciaux, obtenue en inversant les flèches "qui induisent des isomorphismes sur les π_i pour $0 \leq i \leq n$" (ou encore, "en négligeant" les ensembles semi-simpliciaux n-connexes), est équivalente à la catégorie localisée de la catégorie des n- catégories, où on rend inversibles les n-équivalences ? Quoi qu'il en soit, ces petites bavures devraient disparaitre lorsqu'on "stabilise" en faisant augmenter n. A ce propos, on voit que le foncteur "troncature en dim. n" de la théorie homotopique (consistant à tuer les groupes d'homotopie à partir de la dimension n+1) s'interprète dans le langage des n-catégories par l'opération faisant passer d'une N-catégorie ($N > n$) à une n-catégorie, en conservant tels quels les i-objets ($0 \leq i \leq n-1$) et leur composition ($1 \leq i \leq n-1$), et en remplaçant les n-objets par les classes de n-objets "à équivalence près", avec la composition obtenue par passage au quotient. De même, le foncteur d'inclusion évident en théorie homotopique, consistant à regarder un ensemble semi-simplicial "où on a négligé les π_i pour $i \geq n+1$" comme un ensemble semi-simplicial ~~qui~~ (dans la catégorie homotopique) qui se trouve avoir des π_i nuls pour $i \geq n+1$, se traduit par le foncteur allant des n-catégories vers les N-catégories, obtenue en ajoutant à une n-catégorie des i-flèches ($n+1 \leq i \leq N$) identiques exclusivement. (Ainsi, un ensemble est regardé comme une catégorie "discrète", une catégorie comme une 2-catégorie où les <u>Hom</u>(A,B), A et B des 0-objets, sont des catégories discrètes, etc ...)

Bien entendu, rien n'empêche de considérer aussi la notion de ∞-catégorie, à laquelle celle de n-catégorie est comme la notion d'ensemble semi-simplicial tronqué à celle d'ensemble semi-simplicial. Sauf erreur, la localisée de la catégorie des ∞-catégories, pour les flèches de ∞-équivalence, est équivalente à "la catégorie homotopique", localisée de la catégorie des ensembles semi-simpliciaux, ou du moins une sorte de complétée de celle-là. Dans cette optique, le tapis consistant à interpréter une ∞-catégorie de Picard stricte (i.e. quelque chose qui ressemble à un groupe abélien de la catégorie des ∞-catégories) comme donnée (à ∞-équivalence près) par un ~~objet~~ complexe de chaines regardé comme un objet d'une catégorie dérivée, est à relier au tapis de Dold-Puppe, interprétant ces derniers comme des groupes abéliens semi-simpliciaux.

Pour se donner confiance dans ce yoga général, on peut essayer d'interpéter en termes de n-catégories ~~des~~ ou ∞-catégories des constructions familières en homotopie. Ainsi, l'espace des lacets $\Omega(K.,x)$ correspond manifestement à la (n-1)-catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}(x,x)$ formée des i-flèches de C ($1 \leq i \leq n$) dont la 0-origine et la 0-extrémité sont x, réindexées en les appelant (i-1)-flèches. Je n'aperçois pas à vue de nez un joli candidat pour la suspension en termes de n-catégories. Par contre le Hom.(K.,K.') doit correspondre au $\underline{\mathrm{Hom}}(C,C')$, qui est une n-catégorie quand C,C' en sont. La "fibre homotopique" d'une application semi-simpliciale f: $K. \rightarrow K.'$ (transformée d'abord, pour les besoins de la cause, en une fibration de Serre par le procédé bien connu de Serre-Cartan) correspond sans doute à l'opération bien familière de produit (n+1)-fibré (du moins les cas n=0,1 sont bien familiers !) $C \times^{(n+1)}_{C'} C''$ pour des n-foncteurs $C \rightarrow C'$ et $C'' \rightarrow C'$, dans le cas où C" est la n-catégorie ponctuelle, donc la donnée de $C'' \rightarrow C'$ correspond à la donnée d'un 0-objet de C'. Les espaces $K(\pi,n)$ ont une interprétation évidente comme n-gerbes liées par π. Enfin, on voit aussi poindre l'analogue du dévissage de Postnikoff d'un ensemble semi-simplicial - mais la façon dont je l'entrevois (vue ma prédilection pour les topos) passe par la notion de topos classifiant d'un n-groupoïde (généralisant de façon évidente le topos classifiant d'un groupe). En termes de cette notion, on peut, il me semble, interpréter un n-groupoïde en termes d'un (n-1)-groupoïde (savoir son tronqué), <u>muni</u> d'une n-gerbe sur le topos classifiant, liée par π_n ("tordu" bien sûr par l'action du π_1 ...).

Bien sûr, il faut relativiser encore tout le yoga qu'on vient de décrire, au dessus d'un topos quelconque X. Il s'agirait donc de mettre en relation et d'identifier, dans une certaine mesure, d'une part l'algèbre homotopique sur X construite en termes de la notion de faisceau semi-simplicial sur X , d'autre part l'algèbre catégorique sur X construite en termes de la notion de n-champ en groupoïdes ($n \geqslant 0$ fini ou infini). On espère que la notion d'image inverse de faisceau semi-simplicial par un morphisme de topos f: $X \rightarrow X'$ (qui est évidente) correspond à la notion plus subtile d'image inverse de n-champs; et inversement, la notion évidente d'image directe de n-champs par f devrait correspondre à une notion plus subtile d'image directe $Lf_*(K.)$ d'un faisceau semi-simplicial, construit sans doute dans l'esprit des foncteurs dérivés à partir de la notion naïve (mais on hésite s'il faut mettre Lf_* ou Rf_*)... Les dévissages à la Postnikoff doivent avoir encore une interprétation remarquablement simple en termes de n-champs. Comparer à la remarque de Giraud qu'un (1)-champ en groupoides sur X peut s'identifier au couple d'un faisceau π_0 sur X, et d'une (1)-gerbe sur le topos induit $X_{/\pi_0}$ (dont le lien, comme de juste, devrait être noté π_1 !). D'ailleurs, dans le cas des 1-champs en groupoides, la traduction de ces animaux en termes de topos classifiants au dessus de X est, je crois, développé en long et en large dans Giraud$_x$ (il parle, si je me rappelle bien, d' "extensions" du topos X). L'extension (si j'ose dire) de ce tapis aux n-champs ne devrait pas poser de problème.

Remords: tâchant de préciser heuristiquement la notion de topos classifiant d'un n-champ en groupoides (ou plus particulièrement, d'un n-groupoide) pour $n \geq 2$, je vois que je n'y arrive pas à vue de nez. (Bien sûr, il suffirait (procédant de proche en proche) de savoir définir un topos classifiant raisonnable pour une n-gerbe, liée par un faisceau abélien π_n.) Donc je ne sais comment décrire le dévissage de Postnikoff en termes de n-champs, sauf pour $n \leq 2$. Ceci est lié à la question d'une description directe des groupes de cohomologie d'un n-groupoide C (ou d'un n-champ), à coéfficients disons dans un système local commutatif, de façon que pour $C=C_n(K.)$, K. un ensemble semi-simplicial dont les π_i pour $i \geq n+1$ sont nuls, on trouve les groupes de cohomologie correspondants de K. . Peut-on le faire en associant à C, de façon convenable, un ensemble semi-simplicial "nerf" de C ? Bien entendu, si on réussit à définir un topos classifiant pour C, celui-ci devrait être homotope à K. ci-dessus, donc avoir les mêmes invariants homotopiques π_i et cohomologiques H^i; itou pour les champs. La définition habituelle du topos classifiant, dans le cas n=1, a bien cette vertu. Cas particulier typique du Pb de la définition du topos classifiant: pour π un groupe commutatif, trouver un topos canonique (fonctoriel en π bien sûr ...) ayant le type d'homotopie de $K(\pi,n)$, et qui généralise la définition du topos classifiant pour n=1 (topos des ensembles où π opère). On frémit à l'idée que les topos pourraient ne pas faire l'affaire, et qu'il y faille des "n-topos"!! (J'espère bien que ces animaux n'existent pas ...)

La théorie d' "algèbre homologique non commutative" que j'essaie de suggérer pourrait se définir, vaguement, comme l'étude parallèle des notions suivantes et de leurs relations multiples a) espaces topologiques, topos, b) ensembles semi-simpliciaux, faisceaux semi-simpliciaux etc c) n-catégories (notamment n-groupoides), n-champs (notamment n-champs en groupoides) etc d) complexes de groupes abéliens, de faisceaux abéliens etc. (Les "etc" réfèrent surtout aux structures supplémentaires qu'on peut envisager sur les objets du type envisagé...) C'est donc de l'algèbre avec la présence constante de motivations provenant de l'intuition topologique. Si une telle théorie devait voir le jour, il lui faudrait bien un nom, je me demande si "algèbre topologique" ne serait pas le plus adéquat ("algèbre homologique non commutative" ne peut guère aller à la longue, pour des raisons évidentes). Ce qui est aujourd'hui parfois désigné sous ce vocable n'est guère qu'un bric à brac de notions (telles que anneau topologique corps topologique, groupe topologique etc.) ~~qui~~ ne forme guère un corps de doctrine cohérent - il ne s'impose donc pas que cela accapare un nom qui servirait mieux d'autres usages. (Comparer le nouvel usage du terme "géométrie analytique" introduit par Serre, et qui ne semble guère avoir rencontré de résistance.)

Re-salut, et au plaisir de te lire

A.G.