

Lodève le 27.8.74

Cher Deligne,

Étant peut-être empêché par une
faulx d'annuler un cours de 1^{er} cycle
au 1^{er} trimestre, je vais peut-être
le plus faire un petit séminaire
d'algèbre, et envisager de le faire sur
les fondements de Mumford, éventuelle-
ment transposés dans le contexte
des "drapeaux". À ce propos, je t'envoie mon
le tome suivant, qui vous l'installe
votre lemme. Si M, N sont deux
faisceaux cohérents sur un type X ,
et $\tau_{\leq 2} R\text{Hom}(M, N) = E(M, N)$ est le
complexe ayant les invariants

$$\begin{cases} H^i = \text{Ext}^i(M, N) & \text{pour } 0 \leq i \leq 2 \\ H^i = 0 & \text{si } i \notin [0, 2] \end{cases}$$
 il doit y avoir un triangle distingué
canonique

$$(T) \quad \begin{array}{ccc} & \text{Hom}(M, N)[-2] & \\ \swarrow & & \searrow \end{array}$$

donc $E'(M, N)$ est un complexe dont
les invariants H^i sont ceux de
 $E(M, N)$ en degré $i+2$, et qui en
degré 2 donne lieu à une suite exacte

$$(5) \quad 0 \rightarrow \underline{\text{Ext}}^2(M, N) \rightarrow \underbrace{H^2(E'(M, N))}_{P(M, N)} \rightarrow \underline{\text{Hom}}(M, {}_2N)$$

Heuristiquement, $E'(M, N)$ est le
complexe qui exprime le "2-champ
de Picard strict" formé des

1-champ de Picard (par conséquent
"épinglés" par M, N)
stricts) puis des objets variables de X ,

en admettant pour la théorie pour les

1-champ de Picard stricts s'étend aux

2-champ de Picard stricts (ce qui pour
moi est fait grâce au dote); de sorte

$E(M, N)$ correspond aux champs de
Picard stricts épinglés par M, N .

La suite exacte (5) se construit en
tout cas canoniquement "à la main"
si de telles méthodes est le faisceau
des données d'équivalence" puis des

~~schigawa~~ ^{deamps} de Picard épinglé par
 M, N , on obtient l'isomorphisme que
 l'obtention : toute section L d'un
 champ de Picard la symétrie de
 $L \otimes L$, interprétée comme section de
 $2N$. Je sais pourquoi (sans erreur)
 que tout hom. $M \rightarrow_2 N$ provient
 d'un champ de Picard conservable
 (épinglé par M, N) (à priori d'obstruc-
 tion et dans $Ext^3(X, M, N)$, mais
 un argument "universel" prouve
 qu'elle est nulle). Cela prouve que
 l'extension α est bien possible d'être
 splittée : la section du faisceau
 faisceau, sur un objet quelconque
 de X , se ramène - en d'autres
 termes - à une section
 "ensemble". Bien sûr, il y a mieux
 un fait : toute section sur un $U \in \mathcal{A}$
 "provient" d'un élément de $H^1(U, E(M, N))$

4 Exemple Soit A un anneau sur X ,
soient M, N respectivement les
faisceaux K^0 et K^1 associés au
champ additif des A -Modules
projectifs de n -g^(p.ex.) Alors la construction
de Murre-Schubert nous fournit
un diagramme de Picard Springer
pour M, N , d'où une section
canonique du terme milieu $P(M, N)$
de (X) .

NB Tout ce qui précède a les fonctionnalités
évidentes sur $M, N, X \dots$

Questions: Le triangle exact (5) et
le suite exacte $\dots$ sont-ils connus
par les computations (Qui-Ning, Breen,
Illusie...)? Connait-on-ils des
variantes "supérieures"? (Un
principe "géométrique" pour les
obtenir pourrait être via des
champs de Picard non né-
cessairement stricts...)

Je te signale que j'ai réfléchi
aux Gr-chaînes sur X . Si G est
un Gr- $\mathcal{P}$ sur X , N un G -Module
les Gr-chaînes sur X "épinglés" $\mathcal{P}$ -
 G, N forment à priori une 2-catégorie
et même une 2-catégorie de Picard
stricte, grâce à l'opération incidente
à la Baer. On trouve que le
complexe ^(de chaînes) $\mathcal{P}$ -tr-gerait : 1' id. $\mathcal{P}$ - 2 que
leur co-cay. est le complexe

$$\tau_{\leq 2} (R\Gamma(B_G \text{ mod } X, N)[1])$$

(NB la cohomologie de $R\Gamma(B_G \text{ mod } X, N)$
commence au degré 1) Plus géométrique-
quement, un Gr-chaîne sur X épinglé

$\mathcal{P}-(G, N)$
est essentiellement "G-module de $\mathcal{P}$ "
 $\mathcal{P}$ -une 2-gerbe sur B_G , liée par
 N , et $\mathcal{P}$ -issue d'une trisécante
au dessus de $X \cong B_G = (B_G)/\mathcal{P}$

(ici $\mathcal{P}$ est le "objet de B_G "torseur
universel sur $\mathcal{P}$ "). Ces 2-gerbes
forment en fait une 3-catégorie
de Picard à priori, mais il se :

Donc q est un isom., les
3- $\tilde{g}$ lides sont triviales (i.e. π son π est
ce sont des identités) - cela en fait
qu'on a $H^0(B_G/X, N) = 0$

(i.e. $H^0(B_G, N) \rightarrow H^0(X, N)$ injectif...
Donc la 3-catégorie peut être regardée
comme une 2-catégorie - et "c'est
celle des Gr.-champs sur X équivariants
pour G, N . On peut localiser sur
 X , et décrire les champs de Ricard ^{de Ricard} sur X les
champs de Ricard (sur des objets
variables de X) équivariants pour G, N ,
on trouve qu'il se exprime par
le complexe
$$\tau_{\infty} (R p_{G*} \text{Coker}(N \rightarrow R p_{G*} \mathcal{O}_G^* N))$$

si $p_G : B_G \rightarrow X$ et $q_G : B_G \cong X \cong (B_G/p) \rightarrow$
Toutes ces descriptions sont compatibles
avec des variations de G, N, X , cela
donne au principe une description
de la 2-catégorie des Gr.-champs,
avec X, G, N variables...

Je profite de l'occasion pour soulever
une question dans la "théorie
relative" soit $g: X \rightarrow Y$ une immersion
de schémas. Soit F un faisceau cohérent
(sur un complexe d'icelles) sur Y ,
pour-on définir fonctoriellement
la cohomologie relative $R\Gamma(X \text{ mod } Y, F)$
(de la catégorie dérivée de $Ab(Y)$ à
celle de Ab) ? L'interprétation
"géométrique" en termes d'opérations
sur des modules de Picard
(= "grande") suggère que ça doit exister.
Mais je n'ai pas de construction
évidente "à la main" pour donner les
deux cas extrêmes :

1) g est "étale" (cyclique) i.e. pour H
 F sur Y , $F = g_* g^* F$ est g^* -relatif
[NB] C'est le cas de $Y_p \rightarrow Y$ si
 $p \rightarrow e_Y$ est une immersion lisse
c'est donc le cas de $B_e \rightarrow B_Y$ plus haut.
On prend
 $R\Gamma_Y(\text{Coker}(F \rightarrow g_* (\underbrace{C(g^*(F))}_{\text{résol. inf}})) [1])$

2) $\forall F$ injectif sur Y , $q^*(CF) \rightarrow q^*(CF)$ est injectif
 et $F \rightarrow q_* q^* F$ est un isomorphisme
 (ex: q inclusion d'un ouvert $U \hookrightarrow X$).
 On prend

$$RT_Y(Ker(\underbrace{C(F)}_{\text{rés. } j_*}) \rightarrow q_* q^* C(F)))$$

Dans le cas général, la difficulté
 provient du fait que le cœur
 d'un morphisme de complexes
 (tel que

$$F \rightarrow q_* (q^* F) \otimes^L \mathbb{Z}$$

n'est pas fonctoriel (dans la
 catégorie dérivée) p.e. à la flèche
 de $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ peut changer le cœur.

Et pourtant dans le cas particulier
 étudié, il devrait y avoir un
 cœur fonctoriel. Est-ce évident?

Question pour Illusie: Dans le théor.
 des déformations de schémas en groupes
 plats, il tombe sur des $H^3(E_2/X, \mathbb{Z})$
 rep. des $Ext^2(X, \mathbb{Z})$. Peut-on caractériser
 cette sa théorie via la théorie cohomologique
 (cuite) des $\mathbb{A}_1$ -champs - rep. via la
 théorie des champs de $\mathbb{A}_1$.

Il est évident que oui, et un peu d'effort dans la catégorie dérivée de $\mathbb{Z}$ est suffisant pour le voir. Le cas général devrait se faire
 conditionnellement à la théorie des champs de $\mathbb{A}_1$.