

10216
Lodève le 27.8.74 1

Cher Deligne,

Étant peut-être empêché par un
faux de d'arriver au cours de 1^{er} cycle
au 1^{er} trimestre, je vais peut-être
le plus faire un petit séminaire
d'algèbre, et essayer de le faire sur
les jours de Mon hich, éventuelle-
ment transportés dans le contexte
des "dramas". À ce propos, je trouve sur
le trac suivant, qui vous l'installe
une heuristique. Si M, N sont deux
faisceaux cohérents sur un type X ,
et $\tau_{\leq 2} R\text{Hom}(M, N) = E(M, N)$ est le
complexe ayant les invariants

$$\begin{cases} \underline{H}^i = \underline{E}^i(M, N) & \text{pour } 0 \leq i \leq 2 \\ \underline{H}^i = 0 & \text{si } i \notin [0, 2] \end{cases}$$
il doit y avoir un triangle distingué
canonique

$$(T) \quad \swarrow \quad \text{Hom}(M, N)[-2] \quad \nwarrow$$

donc $E'(M, N)$ est un complexe dont
les invariants H^i sont ceux de
 $E(M, N)$ en degré $i+2$, et qui en
degré 2 donne lieu à une suite exacte

$$(*) \quad 0 \rightarrow \underline{\text{Ext}}^2(M, N) \rightarrow \overbrace{H^2(E'(M, N))}^{P(M, N)} \rightarrow \underline{\text{Hom}}(M, {}_2N)$$

Heuristiquement, $E'(M, N)$ est le
complexe qui exprime le "2-champ
de Picard strict" formé des

1-champ de Picard (par conséquent
stricts) "épinglés" par M, N
sur des objets variables de $\mathcal{X}$,
en admettant que la théorie pour les
1-champ de Picard ^{stricts} s'étend aux
2-champ de Picard stricts (ce qui pour
moi est un fait qui se doit); de même
 $E(M, N)$ correspond aux champs de
Picard stricts épinglés par M, N .

La suite exacte (*) se construit en
tout cas canoniquement "à la main"
à partir des médians et le faisceau
des données "équivalences" plus des

~~champs~~ ^{champs} de Picard épinglés par
 M, N , on obtient l'isomorphisme que
 s'obtient en, l'extension : toute section L d'un
 champ de Picard la symétrise de
 $L \otimes L$, interprétée comme section de
 $2N$. Je sais prouver (sans erreur)
 que tout hom. $M \rightarrow_2 N$ provient
 d'un champ de Picard universel
 (épinglé par M, N) (à priori l'obstruc-
 tion est dans $Ext^3(X, M, N)$, mais
 un argument "universel" prouve
 qu'elle est nulle). Cela prouve que
 l'extension α , est bien possible d'être
 splittée : la section des trois fibres
 faisceaux, sur son objet quelconque
 de X , se ramène - en d'autres
 termes - l'extension - une section
 "ensemble". Bien sûr, il y a mieux
 un fait : toute section sur un $U \in \mathcal{O}_X$
 "provient" d'un élément de $H^2(U, E(M, N))$

4

Exemple Soit A un anneau sur X ,
soient M, N respectivement les
faisceaux K^0 et K^1 associés au
champ additif des A -Modules
projectifs de N -g^(p.ex.) A . Alors la construction
de Murre-Schub nous fournit
un diagramme de Picard Springer
pour M, N , d'où une section
canonique du terme milieu $P(M, N)$
de (X) .

NB Tout ce qui précède a les fonctionnalités
évidentes en $M, N, X \dots$

Question: Le triangle exact (T) et
la suite exacte (S) sont-ils connus
par les compétences (Quillen, Breen,
Illusie...)? Trouverait-ils des
variantes "supérieures"? (Un
principe "géométrique" pour les
obtenir pourrait être via des
champs de Picard non nés.
stricts...)

Je te signale que j'ai réfléchi
aux Gr-chaînes sur X . Si G est
un Group sur X , N un G -Module
les Gr-chaînes sur X "épinglées" par
 G, N forment a priori une 2-catégorie
et nous une 2-catégorie de Picard
stricte, grâce à l'opération évidente
à la Baer. On trouve que le
complexe ^(de cochaînes) $\mathcal{H}om$: 1' identifie 2 que
leur complex. est le complexe

$$\tau_{\leq 2}(\mathcal{R}\Gamma(B_G \text{ mod } X, N)[1])$$

(NB la cohomologie de $\mathcal{R}\Gamma(B_G \text{ mod } X, N)$
commence au degré 1) Plus géométrique-
quement, un Gr-chaîne sur X éping-

par (G, N) est essentiellement "Comme d'habitude"
pour une 2-gèbre sur B_G , liée par
 N , et ~~est~~ $\mathcal{H}om$ d'un trisystème
au dessus de $X \approx B_G = (B_G)/P$

(ici P est le "objet de B_G "torsion
universelle sur G "). Ces 2-gèbres
forment en fait une 3-catégorie
de Picard a priori, mais il se

travaux q. ... ces 3-
3-glides sont triviales (i.e. si $\text{source} = \text{but}$
ce sont des identités) - cela se fait
pour exprimer $H^0(B_G/X, N) = 0$

(i.e. $H^0(B_G, N) \rightarrow H^0(X, N)$ injectif...

Dans la 3-catégorie peut être regardée
comme une 2-catégorie - et "c'est

celle des Gr-chaînes sur X équivariantes

par G, N . On peut localiser sur

X , et décrire les chaînes ^{de Rickard} sur X des

chaînes de Rickard (sur des objets

variables de X) équivariantes par G, N ,

on trouve que il se exprime par

le complexe ^{rés. inj.}

$$\tau_{\in 2}(\mathcal{R}p_{G*} \text{Coker}(N \rightarrow \mathcal{R}q_{G*}(\mathcal{G}^*N)))$$

où $p_G : B_G \rightarrow X$ et $q_G : B_G \approx X \approx (B_G/p) \rightarrow$

Toutes ces descriptions sont compatibles

avec des variations de G, N, X , cela

donne au principe une description

de la 2-catégorie des Gr-chaînes,

avec X, G, N variables...

Je profite de l'occasion pour soulever
 une question dans la "théorie
 relative" soit $g: X \rightarrow Y$ une immersion
 de schémas. Soit F un faisceau cohérent
 (sur un complexe d'icous) sur Y ,
 peut-on définir fonctoriellement
 la théorie relative $R\Gamma(X \text{ mod } X, F)$
 (de la catégorie dérivée de $Ab(Y)$ à
 celle de Ab) ? L'interprétation
 "géométrique" en termes d'opérations
 sur des modules de Picard
 ("grand") suggère que ça doit exister.
 Mais par un raisonnement de construction
 évident "à la main" que dans les
 deux cas extrêmes :

1) g est "étale" i.e. pour H
 Pour Y , $F = g_* g^* F$ est injectif
 (NB) C'est le cas de $Y_p \rightarrow Y$ si
 $p \rightarrow e_Y$ est une immersion lisse
 c'est donc le cas de $B_e \rightarrow B_f$ plus haut.
 On prend
 $R\Gamma_{\text{rel}}(\text{Coker}(F \rightarrow g_* (C(\underbrace{g^*(F)}_{\text{résol. inf}}))) [1])$

