

Bonn, le 28 mai 1974

Cher Luc,

J'ai regardé avec désespoir SGAS III. L'énoncé 2.2.4 (iv) est
 bien sûr erroné; il ne sert pas. Par ailleurs, l'hypothèse "A est un A-module
 dualisant" est caméléonesque. A est quelconque, et la bidualité intérieure est
 — Pour X de type fini sur k on a $\mathcal{H}^0(k) : a : X \rightarrow \mathcal{H}^0(k)$, et
 $D(\quad) = \text{RHom}(\quad, \mathcal{H}^0(k))$, ~~on a~~ on a :

$$\text{pour } K \in D_c^b(X)_{\text{cst}}, \quad K \xrightarrow{\sim} DDK$$

Je me suis convaincu que la formule vaut maintenant sans condition
 (sauf peut-être 2.1, les ingrédients sont dans ma lettre à Artin). Il faut que la démonstration
 soit écrite. Je me reporte de ce que faisait le fclotz pour tenter de dresser la liste
 des compatibilités requises. L'exemple semble le cas particulier 7.2 de 7.7 (note jointe).
 Qu'en penses-tu?

Bonne nuit

J. Deligne

PS1. Je me tâte pour rédiger un exposé SGAS III, reprenant ma lettre à Artin.

SGAS III devrait alors ne dépendre que de lui

PS2. On peut définir $\otimes^L : D \times D \rightarrow D$: pour définir $K \otimes^L L$, on considère $\underline{L}$
 pour le rendre plat, et on prend le complexe complexe simple défini par sommes

$$K \otimes^L L = \bigoplus (K \otimes L_n) = \varinjlim_n \bigoplus (\tau_{\leq n} K \otimes L_n) \quad \text{la dernière expression}$$

qualifie que ça a un sens. Prends garde que lorsque K ne soit à reb. Je me demandais si ça pouvait
 simplifier des énoncés. J'ai doute à fait.

Vérification de la formule de Lefschetz-Voronoi

28 mai 74

Noté 1) On définit

$$\text{Hom}(H^*(X), H^*(Y)) = DH^*(X) \otimes H^*(Y) = H^*(X \times Y, DF \otimes G)$$

[à pr. / corps] $\rightarrow D \otimes V$
[à pr. / corps] $\rightarrow D \otimes V$

l'isomorphisme $\text{Hom}(H^*(X), H^*(Y)) \cong H^*(Y, H^*(X)) \rightarrow A$ et l'on se retrouve à $\otimes$ et se ramène après à $\int$

2) On relie cela et la formalisme des correspondances cohomologiques, par

$$H^*(X \times Y, DF \otimes G) = \text{Hom}(F, G)$$



Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \boxed{R\text{Hom}(Rf_*, F, K) \otimes R\text{Hom}(K, Rg_*, G)} & \xrightarrow{\otimes} & \boxed{R\text{Hom}(Rf_*, F, Rg_*, G)} \\ \downarrow \textcircled{3} & & \downarrow \textcircled{3} \\ Rf_* R\text{Hom}(F, Rf^* K) \otimes Rg_* R\text{Hom}(g^* K, G) & & \\ \downarrow \textcircled{3} & & \\ \boxed{Rg_* (f^* R\text{Hom}(F, Rf^* K) \otimes g^* R\text{Hom}(g^* K, G))} & & \\ \downarrow \textcircled{3} & & \\ R\tau_* (R\text{Hom}(f^* F, f^* Rf^* K) \otimes R\text{Hom}(Rq^* g^* K, Rq^* G)) & \xrightarrow{\otimes} & \boxed{R\tau_* R\text{Hom}(f^* F, Rq^* G)} \end{array}$$

- ① composition
- ② adjonction et changement de base
- ③ adjonction
- ④ Kunneth
- ⑤ foncteur
- ⑥ $f^* Rf^* \rightarrow Rq^* g^*$, et composition

$$F, G, K \in D_c^b(A)_{\text{c.f.}}$$

Pour $K = A_S$, $D_x \text{Hom}(\cdot, Rf^* K), \dots$

$$\begin{array}{ccc} DF \otimes F \otimes Rg_* G & \xrightarrow{\otimes} & R\text{Hom}(Rf_*, F, Rg_*, G) \\ \downarrow \textcircled{3} (\textcircled{3}) & & \downarrow \textcircled{3} \\ R\tau_* (DF \otimes G) & \xrightarrow{\otimes (\textcircled{3})} & R\tau_* R\text{Hom}(f^* F, Rq^* G) \end{array}$$

C'est le diagramme qui nous intéresse

2/ Soit $\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{f} & \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ & \xrightarrow{g} & \end{array}$ ce diagramme 1.2 ~~est commutatif~~

- ① est un isomorphisme pour Rf_* F parfait
- ② $\rightarrow$ on dispose de K\"{o}nnert pour $D_X F$ et G
- ③ $\rightarrow$ —
- ④ provient d'un isomorphisme local analogue

$$p^* D_X F \otimes^L q^* G \rightarrow R\text{Hom}(p^* F, Rq^* G)$$

non, la hypothèse de localité.

3/ L'inverse de l'isomorphisme 2/③ permet de définir un accomplissement

$$R\text{Hom}(p^* F, Rq^* G) \otimes R\text{Hom}(q^* G, Rp^* F) \rightarrow p^* K_X \otimes^L q^* K_Y$$

① Pour f et g propres, on voit en parcourant 1.2 que l'intégrale de cet accomplissement s'identifie à la trace

4/ Pour $z: T \rightarrow X \times Y$, on a

$$Rz_* R z^! R\text{Hom}(p^* F, Rq^* G) = Rz_* R\text{Hom}(p z^* F, R q z^* G)$$

Pour $s: S \rightarrow X \times Y$ et t le produit fibre de z et s , on a $t: T \rightarrow X \times Y$

$$\begin{array}{ccc} R z_* R\text{Hom}(p z^* F, R q z^* G) \otimes R s_* R\text{Hom}(q s^* G, R p s^* F) & \rightarrow & R\text{Hom}(p^* F, Rq^* G) \otimes R\text{Hom}(q^* G, Rp^* F) \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ R t_* R t^! (R\text{Hom}(p^* F, Rq^* G) \otimes R\text{Hom}(q^* G, Rp^* F)) & \rightarrow & p^* K_X \otimes^L q^* K_Y \\ \downarrow R t_* K_T & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & \downarrow K_{X \times Y} \end{array}$$

(localisation du sup-produit)

5/ L'isomorphisme 1.2 ③ a la façon naturelle de regarder une classe de correspondances comme agissant sur la cohomologie. Il se compare aux automorphismes

Formulaires

- formules d'adjonction :
- $(Rf_!, Rf^!)$ (dualité de Grothendieck)
 - (f^*, Rf_*) (dualité perverse)
 - $(B\otimes, RHom(B,))$ (formule chape de Cartan)

formules de commutation :

les adjoints à gauche commutent entre eux } donc des complexes injectifs
 les adjoints à droite commutent entre eux } appropos : $\frac{x}{y} = \frac{x}{y}$ ou $\frac{x}{y} = \frac{x}{y}$

- formule d'échange :
- D échange $Rf_!$ et Rf_*
 f^* et $Rf^!$
 $B\otimes$ et $RHom(B,)$

- inductibilité locale :
- $DD = Id$

- flèche de commutation :
- $adj f = adj g \rightarrow adj g = adj f$

- coïncidences :
- f propre : $Rf_! = Rf_*$
 - f lisse : $Rf^! = f^* \otimes (-)[n]$
 - B loc $c^!$: $RHom(B,) = B^* \otimes$

Lors d'une coïncidence, certaines flèches de commutation sont des isomorphismes - celles qui peuvent l'être - et deviennent - la formule de commutation.

cas de local : $i : x \rightarrow X$; $L i_! = \otimes K$, K dual normalisé

$$(sp^*, sp_*, i^*, i_!, i^!, i_*) \xrightarrow{\text{échange par } D} sp_! = sp^!$$

Variante de D : conditions des schémas de type fini sur S régulier de dim 1 ; soit A un anneau local noethérien complet sur A , et pour $x \in S$, soit $K_x = \hat{A}_x/A$. Pour valant que on se borne à ne considérer que les ~~complexes~~ complexes de Tor - dim finie $(D_{L,f}^+)$ - ceci est stable par les 4 foncteurs - le formalisme reste valable.