

Bures, le 28 mai 1974

Cher Luc,

J'ai regardé avec désespoir SGA5 III. L'énoncé 1.2.4 (iv) est
 bien sûr canalé; il ne restait pas. Par ailleurs, l'hypothèse "A est un A-module
dualisant" est canalésque. A est quelconque, et la bidualité interne est
 — Pour X de type fini sur $\text{Spec}(k)$: $a: X \rightarrow \text{Spec}(k)$, et
 $D(\quad) = R\text{Hom}(\quad, Ra^!A)$, ~~Donc~~ on a :

$$\text{pour } K \in D_c^b(X)_{\text{loc}}, \quad K \xrightarrow{\sim} DDK.$$

Je me mis convaincu que la formule vaut maintenant sans conjecture
 (sauf peut-être 3.1, les ingrédients sont dans mes lettres à Artin) — Il faut que la démonstration
 soit écrite — Je mis reparti de ce que faisait le schéma pour tenter de donner la suite
 des compatibilités requises — L'exemple semble le cas particulier 1.2 de 1.7 (notes jointes).

Qu'en penses-tu ?

Bonne nuit

p. Deligne

PS1. Je me bats pour rédiger un exposé SGA4 XX, reprenant mes lettres à Artin.

SGA5 III devrait alors ne dépendre que de lui

PS2. On peut définir $\overset{L}{\otimes} : D \times D^+ \rightarrow D$: pour définir $K \overset{L}{\otimes} L$, on résoud L
 pour le rendre plat, et on prend le ~~double~~ complexe simple défini par sommes

$$K \overset{L}{\otimes} L = \underline{\otimes} (K \otimes L_*) = \varinjlim_n \underline{\otimes} (\tau_{\leq n} K \otimes L_*) \quad \text{La dernière expression}$$

garantit que ça a un sens. Prends garde que résoudre K ne soit à venir. Je me demandais si ça pouvait
 simplifier des énoncés. J'en doute à présent.

Vérification de la formule de Lefschetz - Verdier

28 mai 74

Lemme 1) On identifie

$$\text{Hom}(H^*(X), H^*(Y)) = DH^*(X) \otimes H^*(Y) = H^*(X \times Y, DF \otimes G)$$

[① par / corps $\rightarrow D = V$
② Kunneth "]

l'accompliment $\text{Hom}(H^*(X), H^*(Y)) \otimes H^*(Y), H^*(X) \rightarrow A$ et l'on au niveau du $\otimes$, et se ramène après en $\int$

2) on relie cela et le formalisme des correspondances cohomologiques, par

$$H^*(X \times Y, DF \otimes G) = \text{Hom}(*F, *G)$$



Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \boxed{R\text{Hom}(Rf_* F, K) \otimes R\text{Hom}(K, Rg_* G)} & \xrightarrow{\textcircled{1}} & \boxed{R\text{Hom}(Rf_* F, Rg_* G)} \\
 \downarrow \textcircled{3} & & \downarrow \textcircled{2} \\
 Rf_* R\text{Hom}(F, Rf^* K) \otimes Rg_* R\text{Hom}(g^* K, G) & \xrightarrow{1.1.} & \\
 \downarrow \textcircled{4} & & \\
 \boxed{R\pi_* (p^* R\text{Hom}(F, Rf^* K) \otimes q^* R\text{Hom}(g^* K, G))} & & \\
 \downarrow \textcircled{5} & & \\
 R\pi_* (R\text{Hom}(p^* F, p^* Rf^* K) \otimes R\text{Hom}(Rq^* g^* K, Rq^* G)) & \xrightarrow{\textcircled{6}} & \boxed{R\pi_* R\text{Hom}(p^* F, Rq^* G)}
 \end{array}$$

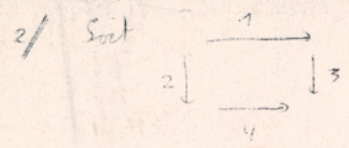
- ① composition
- ② adjonction et changement de base
- ③ adjonction
- ④ Kunneth
- ⑤ foncteurabilité
- ⑥ $p^* Rf^* \rightarrow Rq^* g^*$, et composition

$$F, G, K \in D_c^b(\cdot, A)_{\text{tor}}$$

Pour $K = A_S$, $D_X = R\text{Hom}(\cdot, Rf^* K)$, ... :

$$\begin{array}{ccc}
 DR \boxtimes F \otimes Rg_* G & \xrightarrow{\textcircled{1}} & R\text{Hom}(Rf_* F, Rg_* G) \\
 \downarrow \textcircled{2} (= \textcircled{4} \textcircled{3}) & & \downarrow \textcircled{5} \\
 R\pi_* (DF \boxtimes G) & \xrightarrow[\textcircled{4} (= \textcircled{6} \textcircled{5})]{1.2.} & R\pi_* R\text{Hom}(p^* F, Rq^* G)
 \end{array}$$

C'est ce diagramme qui nous intéresse.



ce diagramme 1.2 ~~est un diagramme commutatif~~

- ① est un isomorphisme pour $Rf_! F$ parfait
- ② " " " on dispose de Kinneth pour $D_x F$ et G
- ③ " " " —
- ④ provient d'un isomorphisme local analogue

$$p^* D_x F \otimes^{\mathbb{L}} q^* G \xrightarrow{\sim} RHom(p^* F, Rq^! G)$$

sur des hypothèses de dualité.

3// L'inverse de l'isomorphisme 2/④ permet de définir un accouplement

$$① \quad RHom(p^* F, Rq^! G) \otimes RHom(q^* G, Rp^! F) \rightarrow p^* K_X \otimes^{\mathbb{L}} q^* K_Y$$

② Pour f et g propres, on voit en parcourant 1.2 ainsi $\square$ que l'intégrale de cet accouplement s'identifie à la trace

4// Pour $z: \Gamma \rightarrow X \times_S Y$, on a

$$③ \quad R z_! R z^! RHom(p^* F, Rq^! G) = R z_! RHom(p z^* F, R q z^! G)$$

Pour $s: \Delta \rightarrow X \times_S Y$ et t le produit fibre de z et s , on a
 $t: T \rightarrow X \times_S Y$

$$\begin{array}{ccc}
 R z_! RHom(p z^* F, R q z^! G) \otimes^{\mathbb{L}} R s_! RHom(q s^* G, R p s^! F) & \xrightarrow{\quad} & RHom(p^* F, Rq^! G) \otimes RHom(q^* G, Rp^! F) \\
 \downarrow & \nearrow & \downarrow \\
 R t_! R t^! (RHom(p^* F, Rq^! G) \otimes RHom(q^* G, Rp^! F)) & \xrightarrow{\quad} & p^* K_X \otimes^{\mathbb{L}} q^* K_Y \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 R t_! K_T & \xrightarrow{\quad} & K_{X \times_S Y}
 \end{array}$$

(localisation au cap. précédent).

5// L'isomorphisme 1.2 ③ est la façon naturelle de regarder une classe de correspondance comme agissant sur la cohomologie. Il se compare aux automorphismes.

Formulaire

- formules d'adjonction : $(Rf_!, Rf^!)$ (dualité de Lefschetz)
 (f^*, Rf_*) (dualité linéaire)
 $(B^\otimes, R\text{Hom}(B,))$ (formule chape de Cartan)

formules de commutation : les adjoints à gauche commutent entre eux } dans des diagrammes adéquats
 les adjoints à droite commutent entre eux } appropriés ; $\begin{matrix} X \rightarrow X \\ \downarrow \quad \downarrow \\ Y \rightarrow Y \end{matrix}$ ou $\begin{matrix} f: X \rightarrow Y \\ \downarrow \quad \downarrow \\ g: X \rightarrow Y \end{matrix}$

- formules d'échange : D échange $Rf_!$ et Rf_*
 f^* et $Rf^!$
 $B^\otimes$ et $R\text{Hom}(B,)$

bidualité locale : $DD = Id$

flèches de commutation : $adj g \circ adj h \rightarrow adj h \circ adj g$

- coïncidences : f propre : $Rf_* = Rf_!$
 f lisse : $Rf^! = f^* \otimes (n)[m]$
 B loc c^+ : $R\text{Hom}(B,) = B^* \otimes$

Lors d'une coïncidence, certaines flèches de commutation sont des homomorphismes : celles qui peuvent devenir - et deviennent - des formules de commutation.

cas ste local : $i: x \hookrightarrow X$; $L i_? = \otimes K$, K dual normalisé

$$(sp^*, sp_*, l_*, l^!, l_?, l^?) \xrightarrow{\text{échange par } D} sp_! = sp^!$$

Variante de D : considérons des schémas de type fini sur S régulier de dim 1 ; soit A un $\mathcal{O}_S$ -module localement constant sur A , et pour $X \xrightarrow{a} S$, soit $K_X = Ra^*A$. Pour autant qu'on se limite à ne considérer que des ~~schémas~~ complètes de tor-dim finie ($D_{\text{tor-f}}^b$) - ceci est stable par les 4 foncteurs - le formulaire reste valable.